EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE SUCESIONES Y SERIES

EDDY ABREU, AÍDA MONTEZUMA Y JAIME RANGEL

UNIVERSIDAD METROPOLITANA

EJERCICIOS Y PROBLEMAS
DE SUCESIONES Y SERIES

EDDY ABREU, AIDA MONTEZUMA Y JAIME RANGEL

Universidad Metropolitana,
Caracas, Venezuela, 2017

Hecho el depósito de Ley

Depósito Legal:
ISBN:

Formato: 21,5 X 27,9 cms.
Nº de páginas: 74

Reservados todos los derechos.

Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse,
registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información,
en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético
o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso por escrito del
editor.

Autoridades

Hernán Anzola
Presidente del Consejo Superior

Benjamín Scharifker
Rector

María del Carmen Lombao
Vicerrectora Académica

María Elena Cedeño
Vicerrectora Administrativa

Mirian Rodríguez de Mezoa
Secretario General

Comité Editorial de Publicaciones
de apoyo a la educación

Prof. Roberto Réquiz
Prof. Natalia Castañón
Prof. Mario Eugui
Prof. Humberto Njaim
Prof. Rossana París
Prof. Alfredo Rodríguez Iranzo (Editor)

A Fabiana, Oriana, Annabella, Mikaela y Mattias

A.M.

A Mariana y a mis Ángeles del Cielo

E.A.

A Valentina y Ángel
J.R.

INTRODUCCIÓN

La presente guía ha sido diseñada para ayudar a los estudiantes de Matemática III a comprender los temas de sucesiones y series que se dictan en el curso.

Este material está escrito con un lenguaje preciso y sencillo, para facilitar su comprensión; contiene 42 ejercicios y problemas resueltos, 100 ejercicios y problemas propuestos con sus respuestas y 12 problemas para reforzar la creatividad.

- ✓ Ejercicios y problemas resueltos para que los estudiantes reflexionen sobre los distintos conceptos teóricos, propiedades y teoremas básicos, para que adquieran destrezas, precisión en los cálculos y en la resolución de problemas. Así mismo se presentan ejercicios y problemas integradores de conocimientos que le permitan establecer relaciones entre distintos conceptos matemáticos.

- ✓ Ejercicios y problemas propuestos con sus respuestas, cuya finalidad es que el estudiante revise y refuerce los conceptos estudiados, adquiera destrezas técnicas y compruebe el progreso alcanzado.

- ✓ Problemas para reforzar la creatividad que al ser menos rutinarios y requerir una mayor comprensión de los conceptos, y algunos con muchas soluciones, plantean un reto a los estudiantes y contribuyen a elevar el nivel del curso.

CONTENIDOS

Ejercicios y problemas resueltos

1. **a**) Calcule los seis primeros términos de la sucesión $\left\{2+\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

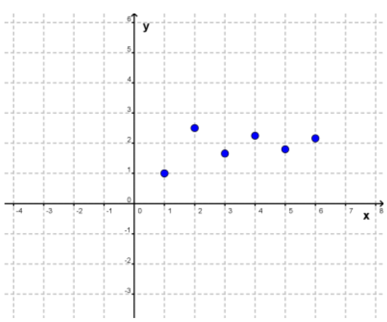
b) Grafique los términos obtenidos en la parte en a).

c) ¿Parece tener límite la sucesión? Si es así, calcúlelo.

Solución:

a) $a_1 = 2-1=1$, $a_2 = 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$, $a_3 = 2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$, $a_4 = 2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$ $a_5 = 2-\frac{1}{5}=\frac{9}{5}$ $a_6 = 2+\frac{1}{6}=\frac{13}{6}$

b)



c) Si parece tener límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left[2+\frac{(-1)^n}{n}\right]=2+0=2$$

2. Determine si la sucesión cuyo término enésimo es $a_n=\frac{n^3}{3n+7n^3}$ converge o diverge. Si converge calcule su límite.

Solución:

En este caso, bastaría con calcular el límite. Observe que tanto el numerador como el denominador tienden a infinito cuando *n* tiende a infinito, pero si se divide el numerador y el denominador entre n^3 se pueden aplicar los teoremas de límites y resulta:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{3n+7n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{3}{n^2}+7}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}7}=\frac{1}{0+7}=\frac{1}{7}$$

Como el límite existe, la sucesión es convergente, y converge a $\frac{1}{7}$.

3. Determine si la sucesión cuyo término enésimo es $a_n = \frac{3\ln n}{e^n}$ converge o diverge. Si converge calcule su límite.

Solución:

Observe que tanto el numerador como el denominador tienden a infinito cuando *n* tiende a infinito, pero no se puede aplicar la regla de L'Hopital a una sucesión.

Sea $f(x) = \frac{3\ln x}{e^x}$, con $x > 0$ (A la función *f* si se le puede aplicar la regla).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3\ln x}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{xe^x} = 0$$

Como $f(n) = a_n$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{3\ln n}{e^n} = 0$ y la sucesión es convergente, y converge a 0.

4. Determine si la sucesión cuyo término enésimo es $a_n = \frac{n^5 + 4}{\ln(n^2 + 2)}$ converge o diverge. Si converge calcule su límite.

Solución:

Observe que tanto el numerador como el denominador tienden a infinito cuando *n* tiende a infinito.

Sea $$f(x) = \frac{x^5 + 4}{\ln(x^2 + 2)},\ x > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + 4}{\ln(x^2 + 2)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{\frac{2x}{x^2 + 2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^4(x^2 + 2)}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^6 + 10x^4}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{30x^5 + 40x^3}{2} = +\infty$$

Como $f(n) = a_n$ para $n \geq 0$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + 4}{\ln(n^2 + 2)} = +\infty$ y la sucesión es divergente

5. Determine si la sucesión $\left\{\sqrt[n]{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge o diverge. Si converge calcule su límite.

Solución:

Sea $f(x)=(2x)^{\frac{1}{x}}$, para $x \geq 1$.

$$f(x)=(2x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln\left(f(x)\right)=\frac{1}{x}\ln(2x) \Rightarrow f(x)=e^{\frac{1}{x}\ln(2x)}$$

Como $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(2x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(2x)}{x}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{2x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, dado que la función exponencial es continua, se tiene que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=e^{0}=1$

Dado que $f(n)=(2n)^{\frac{1}{n}}$ para $n \geq 1$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=1$, y la sucesión $\left\{\sqrt[n]{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 1.

6. Determine si la sucesión cuyo término enésimo es $a_n=\frac{3n-5}{4+7n}$ es monótona, o no es monótona.

Solución:

$$a_n=\frac{3n-5}{4+7n} \qquad \text{y} \qquad a_{n+1}=\frac{3(n+1)-5}{4+7(n+1)}=\frac{3n-2}{7n+11}$$

Observe que

$$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_n - a_{n+1} < 0 \quad \text{y} \quad a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow a_n - a_{n+1} > 0$$

$$a_n - a_{n+1}=\frac{3n-5}{4+7n}-\frac{3n-2}{7n+11}=\frac{(3n-5)(7n+11)-(3n-2)(4+7n)}{(4+7n)(7n+11)}=\frac{-47}{(4+7n)(7n+11)}<0 \text{ para } n \geq 0$$

Por lo tanto, $a_n - a_{n+1} < 0$, y en consecuencia $a_n < a_{n+1}$ y la sucesión es creciente, en consecuencia es monótona.

Otra manera de estudiar la monotonía es definiendo una función derivable tal que $f(n)=a_n$:

Sea $f(x)=\frac{3x-5}{4+7x}$ con $x \geq 0$, y estudiemos el signo de la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{3(4+7x)-7(3x-5)}{(4+7x)^2}=\frac{12+21x-21x+35}{(4+7x)^2}=\frac{47}{(4+7x)^2}>0$$

Por lo tanto, la función f es creciente en para $x \geq 0$, como $f(n) = a_n$ la sucesión dada es creciente.

7. Determine si la sucesión cuyo término enésimo es $a_n = \dfrac{(-1)^n}{5n}$ es creciente o decreciente, o no es monótona.

Solución:

La solución dada no es monótona. ¿Por qué?

8. Determine si la sucesión $\left\{\dfrac{5^n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente o decreciente, o no es monótona.

Solución:

Sean $a_n = \left(\dfrac{5}{2}\right)^n$ y $a_{n+1} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{n+1}$.

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{5}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{5}{2}\right)^n = \left(\frac{5}{2}\right)^n\left[\frac{5}{2} - 1\right] = \left(\frac{5}{2}\right)^n \cdot \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$$, para todo *n*.

En consecuencia, la sucesión es creciente.

9. a) Demuestre que la sucesión $\left\{\dfrac{2^n}{3^n - 4}\right\}_{n=2}^{\infty}$ es decreciente y está acotada inferiormente.

b) ¿Qué se puede deducir del resultado obtenido en a).

Solución:

a) $$a_n - a_{n+1} = \frac{2^n}{3^n - 4} - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1} - 4} = \frac{2^n(3^{n+1} - 4) - 2^{n+1}(3^n - 4)}{(3^n - 4)(3^{n+1} - 4)} = \frac{2^n(3^{n+1} - 4 - 2\cdot 3^n + 8)}{(3^n - 4)(3^{n+1} - 4)} =$$

$$= \frac{2^n(4 + 3^n(3 - 2))}{(3^n - 4)(3^{n+1} - 4)} = \frac{2^n(4 + 3^n)}{(3^n - 4)(3^{n+1} - 4)} > 0 \text{ para } n \geq 2$$

Por lo tanto, $a_n - a_{n+1} > 0$, en consecuencia $a_n > a_{n+1}$ y la sucesión es decreciente.

Observe que $0 < \dfrac{2^n}{3^n - 4}$ para toda $n \geq 2$ y en consecuencia la sucesión está acotada inferiormente.

b) Como la sucesión es decreciente y está acotada inferiormente es convergente.

10. Si la sucesión dada en 9a) es convergente halle su límite.

Solución:

Observe que tanto el numerador como el denominador tienden a infinito cuando *n* tiende a infinito.

Sea $f(x)=\dfrac{2^x}{3^x-4}$, con $x>0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{3^x-4}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2}{3^x\ln 3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x\frac{\ln 2}{\ln 3}=0 \quad \text{¿Por qué?}$$

Como $f(n)=a_n$ se tiene que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n-4}=0$ y la sucesión converge a 0.

11. **a**) Halle los cinco primeros términos de la sucesión cuyo término enésimo es $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

b) Determine si la sucesión converge o diverge. Si converge calcule su límite.

Solución:

a) $a_1=1+1=2$ $\quad a_2=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}=2{,}25$ $\quad a_3=\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3=\left(\dfrac{4}{3}\right)^3=\dfrac{64}{27}\approx 2{,}37$

$a_4=\left(1+\dfrac{1}{4}\right)^4=\left(\dfrac{5}{4}\right)^4=\dfrac{625}{256}\approx 2{,}44$ $\quad a_5=\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^5=\left(\dfrac{6}{5}\right)^5=\dfrac{7776}{3125}\approx 2{,}48$

b) Observe que $1+\dfrac{1}{n}$ tiende a 1 cuando *n* tiente a infinito, y en consecuencia resulta una indeterminación de la forma 1^∞.

Sea $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, para calcular el límite se hace $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$,

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y=x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\Rightarrow y=\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Como la función exponencial es continua $\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\mathrm{e}^{\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

Evaluemos $\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$:

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^1=e$$

Como $f(n)=a_n$ se tiene que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ y la sucesión es convergente y converge a *e*.

12. Escriba la fórmula de recurrencia para a_n si los tres primeros términos de la sucesión son $\sqrt{6}$, $\sqrt{6+\sqrt{6}}$, $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$, y halle $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Solución:

Observe que $a_1=\sqrt{6}$, $a_2=\sqrt{6+a_1}$, $a_3=\sqrt{6+a_2}$, en general se tiene que

$$a_1=\sqrt{6} \quad \text{y} \quad a_{n+1}=\sqrt{6+a_n} \quad \text{para } n\geq 1$$

Para hallar el límite se supone que $a_n\to L$, entonces se tiene que $a_{n+1}\to L$ cuando $n\to\infty$.

En consecuencia, cuando $n\to\infty$, se obtiene

$$L=\sqrt{6+L}$$

De donde

$$L^2=6+L\Rightarrow L^2-L-6=0\Rightarrow L=\frac{1+\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1+5}{2}=3$$

(la solución negativa se descarta, ¿por qué?)

Luego, $\lim_{n\to\infty} a_n=3$

13. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

Solución:

La serie converge si su sucesión de sumas parciales converge:

Como $S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \cdots$

Se tiene que

$$S_1 = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3}, \quad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \ \ldots$$

Determinemos una fórmula para S_n:

Observe que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, luego

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Determinemos si la sucesión de sumas parciales converge:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge a 1.

14. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n+1}$ es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

Solución:

Una condición para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converja es que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, observe que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{5n+1} = \lim_{n\infty} \frac{1}{5 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{5} \neq 0$$

En consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n+1}$ diverge.

15. Determine si la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(0{,}8)^n}{7}$ es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

Solución:

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(0{,}8)^n}{7}$ es una serie geométrica de razón $0{,}8 \in (-1,1)$ y por lo tanto converge. Su suma viene dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty}(0{,}8)^n = \frac{1}{1-0{,}8} = \frac{1}{0{,}2} = 5$$

En consecuencia, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(0{,}8)^n}{7}$ converge a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(0{,}8)^n}{7} = \frac{1}{7}\sum_{n=1}^{\infty}(0{,}8)^n = \frac{5}{7}$$

16. Demuestre, usando el criterio de la integral, que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge.

Solución:

Sea $f(x)=\frac{1}{x}$ con $x\in[1,+\infty)$, f es una función continua, positiva y decreciente (verifíquelo), además $f(n)=\frac{1}{n}$.

Evaluemos $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\ln x\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left[\ln b - \ln 1\right] = \lim_{b\to+\infty}\ln b = +\infty$$

Por lo tanto, la integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge, en consecuencia la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge.

17. Demuestre, usando el criterio de la integral, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, con $p>1$ converge.

Solución:

Sea $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ con $x\in[1,+\infty)$, f es una función continua, positiva y decreciente, además $f(n)=\dfrac{1}{n}$

Evaluemos $\int_1^\infty f(x)dx$.

$$\int_1^\infty f(x)dx=\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{b^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right]$$

Como $p>1$ se tiene que $1-p<0$ y $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{1-p}=0$, por lo tanto $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx=\dfrac{1}{p-1}$ y la integral converge, en consecuencia, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$, con $p>1$ converge.

18. Determine si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{n}{e^n}\right]$ es convergente o divergente.

Solución:

Sea $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$, f es una función continua, positiva en $[1,\infty]$ y además es decreciente ya que

$$f\,'(x)=\frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x}<0 \text{ si } x>1$$

Luego, se puede aplicar el criterio de la integral para estudiar la convergencia de la serie

$$\int_1^\infty \frac{x}{e^x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{x}{e^x}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{b}{e^b}-\frac{1}{e^b}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\right]=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{b}{e^b}-\frac{1}{e^b}+\frac{2}{e}\right]=\frac{2}{e} \quad (*)$$

(*) Ya que $\lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{1}{e^b}=0$ y $\lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{b}{e^b}\overset{L\acute{}H}{=}\lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{1}{e^b}=0$

Como la integral $\int_1^\infty \dfrac{x}{e^x}dx$ converge, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{n}{e^n}\right]$ converge.

19. Determine si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+5^n}{2^n}$ es convergente o divergente.

Solución:

Observe que $0 < \dfrac{2+5^n}{2^n}$ y $0 < \left(\dfrac{5}{2}\right)^n$

$$\frac{2+5^n}{2^n} > \frac{5^n}{2^n} = \left(\frac{5}{2}\right)^n \qquad (1)$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5}{2}\right)^n$ es una serie geométrica de razón $\dfrac{5}{2} > 1$ y por lo tanto diverge (2)

De (1) y (2), por el criterio de comparación resulta que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+5^n}{2^n}$ diverge.

20. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3+2\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+3}}$ es convergente o divergente.

Solución:

Observe que $0 < \dfrac{n^3+2\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+3}}$ y $0 < \dfrac{n^3}{\sqrt{n^7}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Sean $a_n = \dfrac{n^3+2\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+3}}$ y $b_n = \dfrac{n^3}{\sqrt{n^7}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente ¿por qué?

Se evalúa $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^3+2\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(n^3+2\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n^7+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\dfrac{2}{n^{\frac{5}{2}}}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n^7}}} = 1$$

Dado que el límite es finito y positivo y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, por el criterio por comparación en el límite la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3+2\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+3}}$ diverge.

21. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n+\frac{2}{n(n+4)}\right]$ es convergente o divergente.

Solución:

Recuerde que si $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ son convergentes entonces $\sum_{n=k}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=k}^{\infty} a_n+\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ es convergente.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$ es una serie geométrica de razón $\frac{1}{\sqrt{3}}$ con $\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|<1$ por lo tanto converge.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es una *p* serie con $p=2>1$, por lo tanto converge, como $0<\frac{1}{n(n+4)}<\frac{1}{n^2}$, por el criterio de comparación, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)}$ también converge.

En consecuencia, $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n+\frac{2}{n(n+4)}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ y converge.

22. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{n^7}-5^n\right]$ es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

Solución:

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^7}$ converge ya que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}$ converge por el criterio de la p-serie, pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty}5^n$ diverge, ya que es una serie geométrica de razón mayor que 1, por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{n^7}-5^n\right]$ diverge. ¿Por qué?

23. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n!}$ es convergente o divergente.

Solución:

Evaluemos $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{6^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{6^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{6^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+1}n!}{6^n\,(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{6}{n+1} = 0 < 1$$

Como el límite es menor que 1, por el criterio del cociente la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n!}$ converge.

24. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n^2+1}{2n^2+n}\right)^n$ es convergente o divergente.

Solución:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^n\left(\frac{n^2+1}{2n^2+n}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

Por el criterio de la raíz, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n^2+1}{2n^2+n}\right)^n$ converge.

25. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{1+2n^2}$ es convergente o divergente.

Solución:

La serie dada es una serie alterna (1)

No es obvio ver si $\frac{\sqrt{n+1}}{1+2(n+1)^2} < \frac{\sqrt{n}}{1+2n^2}$. Para ver si es decreciente, sea $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+2x^2}$

$$f\,'(x) = \frac{\left(1+2x^2\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} - 4x\sqrt{x}}{\left(1+2x^2\right)^2} = \frac{1+2x^2-8x^2}{2\sqrt{x}\left(1+2x^2\right)^2} = \frac{1-6x^2}{2\sqrt{x}\left(1+2x^2\right)^2} < 0 \text{ para toda } x \geq 1$$

Luego, $\frac{\sqrt{n+1}}{1+2(n+1)^2} < \frac{\sqrt{n}}{1+2n^2}$ (2)

Y $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{1+2n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{n^2}+2} = 0$ (3)

De (1), (2) y (3), la serie dada es convergente por la prueba de la serie alterna.

26. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n n!}{(n+2)!}$ es convergente o divergente.

Evaluemos $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}}{a^n}\right|$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-3)^{n+1}(n+1)!}{(n+3)!}}{\frac{(-3)^n n!}{(n+2)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-3)^{n+1}}{(n+3)(n+2)}}{\frac{(-3)^n}{(n+2)(n+1)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{(n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{3}{n}} = 3 > 1$$

Como el límite es mayor que 1, por el criterio del cociente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n n!}{(n+2)!}$ diverge.

27. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^3}$ converge condicionalmente o absolutamente, o diverge.

Solución:

Estudiemos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^3}$

Observe que $0 < \frac{1}{(n+2)^3}$ y $0 < \frac{1}{n^3}$

$$\frac{1}{(n+2)^3} < \frac{1}{n^3} \qquad (1)$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ es una serie es una p-serie con $p = 3 > 1$ y por lo tanto converge (2)

De (1) y (2), por el criterio de comparación resulta que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^3}\right|$ converge entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^3}$ converge absolutamente.

28. Determine si la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge condicionalmente o absolutamente, o diverge.

Solución:

i) La serie dada es una serie alterna (1)

ii) $\dfrac{1}{\ln(n+1)} < \dfrac{1}{\ln n}$ (2)

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$ (3)

De (1), (2) y (3), la serie dada es convergente por la prueba de la serie alterna.

Estudiemos la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left| \dfrac{(-1)^n}{\ln n} \right| = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$

Observe que $0 < \dfrac{1}{\ln n}$ y $0 < \dfrac{1}{n}$

$$\ln n < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$$

La serie armónica $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge, por criterio de comparación, la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left| \dfrac{(-1)^n}{\ln n} \right| = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$ diverge, por lo tanto, la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ converge condicionalmente.

29. Demuestre que el decimal infinito 0.333333… es igual a $\dfrac{1}{3}$.

Solución:

Observe que

$$0{,}33333\cdots = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \cdots = 3 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{100} + 3 \cdot \frac{1}{1000} + \cdots = 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n$$

Considere la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{10} \right)^n$, esta es una serie geométrica de razón $\dfrac{1}{10} \in (-1,1)$ y por lo tanto converge a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}$$

Pero

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n$$

En consecuencia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n - 1 = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}$$

Y

$$3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

Es decir, 0.333333… es igual a $\frac{1}{3}$.

30. Encuentre los valores de *x* para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{x}{7}\right)^n$ converge.

Solución:

La serie dada es una serie geométrica de razón $\frac{x}{7}$ en consecuencia, converge para $\left|\frac{x}{7}\right| < 1$ y diverge para $\left|\frac{x}{7}\right| \geq 1$, por lo tanto converge sólo para los valores de *x* tales que $-7 < x < 7$

31. Encuentre los valores de *x* para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge.

Solución:

Sean $a_n = \frac{x^n}{n!}$ y $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = |\,x\,|\frac{n!}{(n+1)!} = |\,x\,|\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |\,x\,|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = |\,x\,|\cdot 0 = 0 < 1$$

Por el criterio del cociente, la serie converge para toda $x \in R$.

32. Encuentre los valores de *x* para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{3^n n^2}$ converge.

Solución:

Sean $a_n = \dfrac{(-1)^n (x+1)^n}{3^n n^2}$ y $a_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)^2}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)^2}}{\dfrac{(-1)^n(x+1)^n}{3^n n^2}}\right| = \frac{|x+1|}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x+1|}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = \frac{|x+1|}{3}$$

Por el criterio del cociente, para $\frac{|x+1|}{3} < 1$ la serie converge , para $\frac{|x+1|}{3} > 1$ la serie diverge y si $\frac{|x+1|}{3} = 1$ el criterio no aporta información.

Dado que

$$\frac{|x+1|}{3} < 1 \Rightarrow |x+1| < 3 \Leftrightarrow -3 < x+1 < 3 \Leftrightarrow -4 < x < 2$$

Si $-4 < x < 2$ la serie converge, si $x < -4$ ó $x > 2$ la serie diverge.

Falta estudiar cuando $\frac{|x+1|}{3} = 1$, es decir, si $x = -4$ ó $x = 2$

Si $x = -4$ se obtiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-3)^n}{3^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, la cual converge por el criterio de la p-serie con $p = 2 > 1$.

Si $x = 2$ se obtiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3)^n}{3^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, como la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ también converge.

En consecuencia, la serie converge $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{3^n n^2}$ si y sólo si $x \in [-4, 2]$.

33) Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{1}{2(x+3)}$. Usando una serie de potencias, conocida, halle la representación en serie de potencias centrada en $c=0$ para la función dada. Indique su intervalo de convergencia.

Solución:

Se sabe que la serie geométrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ para $|x|<1$, como la representación de una función en serie de potencias es única,

$$\frac{1}{2(x+3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}}=\frac{1}{6}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)}=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{3^n} \quad \text{para } \left|-\frac{x}{3}\right|<1$$

En consecuencia,

$$f(x)=\frac{1}{2(x+3)}=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{3^n}$$

$$\left|-\frac{x}{3}\right|<1 \Rightarrow |x|<3 \Rightarrow -3<x<3$$

34. **a**) Usando una serie de potencias, conocida, halle la representación en serie de potencias de *x* centrada en $c=0$ para la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{1}{3x+4}$, indique su intervalo de convergencia.

b) Use el resultado de la parte a) para hallar la representación en serie de potencias de la función g definida por $g(x)=\dfrac{x^3}{3x+4}$. Indique su intervalo de convergencia.

Solución:

a) $$f(x)=\frac{1}{3x+4}=\frac{1}{4\left(1+\frac{3x}{4}\right)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{3x}{4}\right)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3x}{4}\right)^n=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n x^n}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n x^n}{4^{n+1}}$$

Esta serie converge sólo para $\left|-\frac{3x}{4}\right|<1$, es decir, para $|x|<\frac{4}{3}$. El intervalo de convergencia $\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

b) $g(x)=\frac{x^3}{3x+4}=x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n x^n}{4^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n x^{n+3}}{4^{n+1}}$, para $x\in\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$

35. Usando una serie de potencias, conocida, halle la representación en serie de potencias de $x+1$ para la función *h* definida por $h(x)=\frac{1}{3x+4}$, indique su intervalo de convergencia.

Solución:

$$h(x)=\frac{1}{3x+4}=\frac{1}{3x+3+1}=\frac{1}{1-(-3(x+1))}=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n 3^n (x+1)\right)^n$$

Esta serie converge sólo para $|-3(x+1)|<1$.

$$|-3(x+1)|<1\Rightarrow|x+1|<\frac{1}{3}\Rightarrow-\frac{1}{3}<x+1<\frac{1}{3}\Rightarrow-\frac{4}{3}<x<-\frac{2}{3}$$

El intervalo de convergencia $\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

36) Dada la función f definida por $f(x)=\frac{5x+4}{-3x^2+3x+2}$. Use series de potencias, conocidas, para hallar una representación en serie de potencias centrada en $c=0$ de la función dada. Indique su intervalo de convergencia.

Solución:

Al descomponer en fracciones simples $\frac{5x+4}{-3x^2+3x+2}$, resulta:

$$f(x)=\frac{5x+4}{-3x^2+3x+2}=\frac{5x+4}{(3x+1)(2-x)}=\frac{A}{3x+1}+\frac{B}{2-x}=\frac{1}{3x+1}+\frac{2}{2-x}$$ (Verifíquelo)

i) Hallemos la serie correspondiente a $\frac{1}{3x+1}$:

$$\frac{1}{3x+1}=\frac{1}{1-(-3x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-3x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^n x^n \quad \text{para } |3x|<1$$

$$|3x|<1 \Rightarrow |x|<\frac{1}{3}\Rightarrow -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$$

ii) Hallemos la serie correspondiente a $\frac{2}{2-x}$:

$$\frac{2}{2-x}=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} \quad \text{para } \left|\frac{x}{2}\right|<1$$

$$\left|\frac{x}{2}\right|<1 \Rightarrow |x|<2\Rightarrow -2<x<2$$

De i) y ii) resulta:

$$\frac{x+5}{-3x^2+3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n 3^n+\frac{1}{2^n}\right]x^n, \quad \text{para } -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$$

37. Use la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, para $|x|<1$ para obtener la serie de potencias de

a) $\frac{1}{(1-x)^2}$

b) $\ln(1-x)$

Solución:

Observe que las series de potencias pueden ser derivadas o integradas término a término dentro de su intervalo de convergencia.

a) Como $\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$, para obtener la serie correspondiente a $\frac{1}{(1-x)^2}$ se derivan los términos de la serie correspondiente a $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

Luego,

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}$$

b) Como $\ln(1-x)=-\int_0^x\frac{1}{1-t}dt$, para obtener la serie correspondiente a $\ln(1-x)$ se integran los términos de la serie correspondiente a $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

Luego,

$$\ln(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

38. Encuentre la suma *S*(*x*) de $\sum_{n=0}^{\infty}(x-5)^n$. ¿Dónde es válida?

Solución:

$\sum_{n=0}^{\infty}(x-5)^n$ es una serie geométrica de razón *x*-5, luego

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x-5)^n=\frac{1}{1-(x-5)}=\frac{1}{6-x}$$

Válida para $|x-5|<1$, es decir, para $x\in(4,6)$

39. Determine el polinomio de Maclaurin de orden *n* para la función $f(x)=e^x$.

Solución:

$$f(x)=e^x \Rightarrow f(0)=1$$
$$f'(x)=e^x \Rightarrow f'(0)=1$$

$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x)=e^x \Rightarrow f^{(n)}(0)=1$$

Por lo tanto, al sustituir en la fórmula del polinomio de Maclaurin de grado *n*:

$$P_n = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Se obtiene que

$$P_n = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

40. Determine la serie de Maclaurin para la función $f(x)=e^x$.

Solución:

Del ejercicio anterior, se tiene que

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

Y será válido para todo *x* una vez que demostremos que $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, donde $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ para algún c entre 0 y *x*.

$$f^{(n+1)}(x)=e^x \Rightarrow |R_n(x)|=\left|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\frac{e^c}{(n+1)!}\left|x^{n+1}\right|,$$ para algún c entre 0 y *x*

Como e^x es una función creciente,

- Si $x<0 \Rightarrow c<0 \Rightarrow e^c<1$ y $|R_n(x)|=\left|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!}$
- Si $x=0 \Rightarrow e^x=1$ y $|R_n(x)|=0$
- Si $x>0 \Rightarrow c>0 \Rightarrow e^c<e^x$ y $|R_n(x)|=\left|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{e^x x^{n'+1}}{(n+1)!}$

Como $\frac{x^n}{n!}$ es el término enésimo de una serie convergente (problema) se tiene que $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ para toda $x\in R$, por lo tanto $\lim_{n\to\infty} R_n=0$ y e^x es igual a la suma de su serie, es decir,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

41. **a**) Pruebe que $\frac{e^x}{x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\cdots$ para $0<|x|<\infty$.

b) Halle la serie de Mac-Laurín para la función $G(x)=x^2e^{3x}$.

Solución:

Del problema anterior se obtiene que $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

a) Podemos derminar las serie de Mac-Laurín para $\frac{e^x}{x^2}$ multiplicando la serie de Mac-Laurín correspondiente a e^x por $\frac{1}{x^2}$:

$$\frac{e^x}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\cdots$$

La nueva serie converge para toda $x\in R-\{0\}$, porque la serie correspondiente a e^x converge para toda $x\in R$.

b) En este caso, para obtener la serie correspondiente a e^{3x} sustituimos *x* por 3*x* :

$$e^{3x}=1+3x+\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}\cdots+\frac{(3x)^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}$$

Luego, multiplicamos la serie correspondiente a e^{3x} por x^2

$$G(x)=x^2e^{3x}=x^2\left[1+\frac{3x}{1!}+\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}\cdots+\frac{(3x)^n}{n!}+\cdots\right]=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^{n+2}}{n!}$$

La nueva serie converge para toda $x \in R$, porque la serie correspondiente a e^x lo hace.

42. **a**) Use la definición para hallar la serie de Taylor centrada en $a = \frac{\pi}{2}$ para la función $f(x) = \cos x$.

b) Se sabe que $\operatorname{sen} x = -\frac{d(\cos x)}{dx}$ y que las series de potencias pueden ser derivadas término a término dentro de su intervalo de convergencia. Use el resultado obtenido en la parte a) parte obtener el desarrollo en serie de Taylor centrada en $a = \frac{\pi}{2}$ para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Solución:

a)

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\vdots$$

Por lo tanto, al sustituir en la fórmula de la serie de Taylor

$$\cos x = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^n + \cdots$$

Se obtiene que

$$\cos x = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} + \cdots,$$

Y será válido para todo *x* una vez que demostremos que $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$.

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \cos x \quad \text{ó} \quad \left|f^{(n+1)}(x)\right| = \operatorname{sen} x$$

Por lo tanto,

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \le 1 \text{ para toda } x \in R$$

Y

$$\left| R_n(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^{n+1} \right| \le \frac{\left| x - \frac{\pi}{2} \right|^{n'+1}}{(n+1)!}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^n}{n!} = 0$ por ser el término enésimo de una serie convergente (hacerlo), $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ y cosx es igual a la suma de su serie, es decir,

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^{2n-1}}{(2n-1)!}, \text{ para toda } x \in R.$$

b) $$\operatorname{sen} x = -\frac{d(\cos x)}{dx} \Rightarrow \operatorname{sen} x = 1 - \frac{3\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2}{3!} + \frac{5\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^4}{5!} - \cdots$$

$$\operatorname{sen} x = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^{2n}}{(2n)!}, \; x \in R$$

Ejercicios y problemas propuestos

En los problemas del 1 al 6 determine los cinco primeros términos de la sucesión con el término enésimo dado.

1. $a_n = \frac{2^n}{n!}$ **2**. $a_n = \frac{n+1}{3n-2}$ **3**. $a_n = (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

4. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ **5**. $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ **6**. $a_1 = 2, \quad a_n = 3a_{n-1} - 1$

Respuestas:

1) $2, 2, \frac{8}{6}, \frac{16}{24}, \frac{32}{120}$ **2**) $2, \frac{3}{4}, \frac{4}{7}, \frac{5}{10}, \frac{6}{13}$ **3**) $0, -1, 0, 1, 0$ **4**) $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0$

5) $2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}$ **6**) $2, 5, 14, 41, 122$

En los problemas del 7 al 12 determine el término general a_n, suponiendo que se mantiene el patrón de los cinco términos que se dan.

7. $-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}, -\frac{32}{243}$ **8**. $0, 5, 0, 5, 0$ **9**. $\frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}$

10. $1, \frac{4}{2}, \frac{9}{6}, \frac{16}{24}, \frac{25}{120}$ **11**. $\frac{1}{3}, \frac{8}{5}, \frac{27}{7}, \frac{64}{9}, \frac{125}{11}$ **12**. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}$

Respuestas:

7) $a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{3^n}$ **8**) $a_n = \left(1+(-1)^n\right)\frac{5}{2}$ **9**) $a_n = \frac{n+6}{2}$ **10**) $a_n = \frac{n^2}{n!}$ **11**) $a_n = \frac{n^3}{2n+1}$

12) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$

En los problemas del 13 al 20 determine si la sucesión con término enésimo dado converge o diverge. Si converge calcule el límite.

13. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ **14**. $a_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n+1}$ **15**. $a_n = \frac{\sqrt[3]{n+1}}{n}$ **16**. $\left\{\frac{2^n}{3^n - 4}\right\}_{n=2}^{\infty}$

17. $a_n = \frac{(n+1)!}{n!}$ **18**. $a_n = \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n-1}, \quad n \geq 2$ **19**. $a_n = \cos n$ **20**. $a_n = 2 + \frac{\cos n}{n}$

Respuestas:

13) converge a 0 **14**) diverge **15**) converge a 0 **16**) converge a 0 **17**) diverge **18**) converge a 0 **19**) diverge **20**) converge a 2

En los problemas del 21 al 28 determine si la sucesión con término enésimo dado es monótona. Discuta la existencia de cotas de la sucesión. Para $n \geq 1$.

21. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ **22**. $a_n = \dfrac{3n}{n+2}$ **23**. $a_n = 2 + \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)$ **24**. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{n}}{n}$

25. $a_n = \left(\dfrac{5}{2}\right)^n$ **26**. $a_n = n + \dfrac{1}{n}$ **27**. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+5}$ **28**. $a_n = \dfrac{2^n}{n}$

Respuestas:

21) decreciente, está acota superiormente por 1 e inferiormente por 0 **22**) creciente, está acota superiormente por 3 e inferiormente por 1 **23**) no es monótona, está acotada superiormente por 3 e inferiormente por 1 **24**) no es monótona, está acotada superiormente por 1 e inferiormente por -1 **25**) creciente, está acotada inferiormente por $\dfrac{5}{2}$ y no tiene cota superior **26**) creciente, está acotada inferiormente por 2 y no tiene cota superior **27**) no es monótona, está acotada superiormente por $\dfrac{1}{9}$ e inferiormente por $-\dfrac{1}{6}$ **28**) creciente, acotada inferiormente por 2 y no tiene cota superior.

En los problemas del 29 al 34 determine si la afirmación dada es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

29. Si $\{a_n\}$ converge entonces $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ converge.

30. Si $\{a_n\}$ converge entonces $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ converge a cero.

31. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen entonces $\{a_n + b_n\}$ converge.

32. $\left\{2 - \dfrac{n^2}{1-2n^2}\right\}$ diverge.

33. Si $\{a_n\}$ converge a 4 entonces $a_{n+2} \to 4$ cuando $n \to \infty$

34. Toda Sucesión acotada es convergente

Respuestas:

29) falso **30**) verdadero **31**) verdadero **32**) falso **33**) verdadero **34**) falso

En los problemas del 35 al 37 determine los tres primeros términos no nulos de cada una de las series dadas.

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2n}{2n^2+n+1}$ **36**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+2}{\ln(n+1)}$ **37**. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Respuestas:

35) $-\frac{1}{4}+\frac{3}{22}+\frac{8}{37}$ **36**) $\frac{4}{\ln 2}+\frac{8}{\ln 3}+\frac{14}{\ln 4}$ **37**) $-1+1-1$

En los problemas del 38 al 46 determine las siguientes series son convergentes o divergentes. Si converge determine su suma.

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2n}{2n^2+n+1}$ **39**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{\ln(n+3)}$ **40**. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+\sqrt{3}}{4^n}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+\sqrt{3}}{2^n}$ **42**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{10000}$ **43**. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{3}{n}\right]$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^n$ **45**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3}$ **46**. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Respuestas:

38) diverge **39**) diverge **40**) converge a $2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **41**) diverge

42) diverge **43**) diverge **44**) converge a $\frac{\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}$ **45**) diverge **46**) diverge

En los problemas del 47 al 67 determine las siguientes series son convergentes o divergentes.

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+n+1}$　　**48**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$　　**49**. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8\ln(n+1)}{(n+1)^3}$

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3n!}$　　**51**. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} - \frac{\ln n}{n^2}\right]$　　**52**. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{5}{\sqrt{n}}\right]$

53. $\sum_{n=1}^{\infty} (1{,}0003)^n$　　**54**. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n+1)$　　**55**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(\ln 3)^n}$　　**57**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+2)^n}$　　**58**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}$

59. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{n+1}$　　**60**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n!}$　　**61**. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n!}{10^n}$

62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$　　**63**. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n^3+1} - \left(\frac{1}{8}\right)^n\right]$　　**64**. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+3}}{2^n} - \frac{7}{n^{\frac{2}{5}}}\right]$

65. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2+2}{n^2+n}\right)^{-5n}$　　**66**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^n}{(2n)!}$　　**67**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\operatorname{sen}^2(n)}{n\sqrt{n}}$

Respuestas:

47) converge　**48**) diverge　**49**) converge　**50**) converge　**51**) converge　**52**) diverge　**53**) diverge
54) diverge　**55**) converge　**56**) converge　**57**) converge　**58**) converge　**59**) diverge
60) converge　**61**) diverge　**62**) converge　**63**) converge　**64**) diverge　**65**) converge　**66**) converge　**67**) converge

En los problemas del 68 al 73 determine si las series convergen condicionalmente o absolutamente, o divergen.

68. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n!}$　　**69**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2+n^2)}{e^n}$　　**70**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^4}}$

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n^2}$　　**72**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}\operatorname{sen} n}{n^3}$　　**73**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^3+1}$

Respuestas:

68) converge absolutamente **69**) converge absolutamente **70**) converge condicionalmente
71) diverge **72**) converge absolutamente **73**) converge condicionalmente.

En los problemas del 74 al 77 exprese el decimal periódico como una serie geométrica, y exprese su suma como el cociente de dos enteros.

74. $0,\bar{5}$ **75**. $0,\overline{12}$ **76**. $0,2\bar{6}$ **77**. $0,00\bar{2}$

Respuestas:

74) $5\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n=\frac{5}{9}$ **75**) $12\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n=\frac{12}{99}$ **76**) $0,2+6\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n=\frac{4}{15}$ **77**) $2\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n=\frac{1}{450}$

En los problemas del 78 al 86 encuentre los valores de *x* para los cuales la serie converge.

78. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{3}{2}\right)^n x^n}{n+1}$ **79**. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x+4)^n}{3^n\cdot n^2}$ **80**. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n$

81. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{10^n}x^n$ **82**. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(3x-2)^n}{5^n}$ **83**. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x+1)^n}{n}$

84. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)(x-4)^n}{2n}$ **85**. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2(x+3)^n}{(2n)!}$ **86**. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^{2n}}{n(n^2+3n+2)}$

Respuestas:

78) $-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3}$ **79**) $-7\le x\le -1$ **80**) $x<-1$ ó $x>1$ **81**) $-10<x<10$

82) $-1<x<\frac{7}{3}$ **83**) $-2<x\le 0$ **84**) $3<x<5$ **85**) $-7<x<1$ **86**) $5\le x\le 7$

En los problemas del 87 al 92, use una serie conocida, para hallar la representación en serie de potencias centrada en el punto indicado para la función dada. Indique su intervalo de convergencia.

87. $f(x)=\frac{1}{9+x}$, $a=0$ **88**. $f(x)=\frac{x^2}{x-5}$, $a=0$ **89**. $f(x)=\frac{1}{2x+3}$, $a=0$

90. $f(x)=\dfrac{1}{6+x}$, $a=1$ **91**. $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$, $a=0$ **92**. $f(x)=\left(\dfrac{2+5x}{3}\right)^{-1}$, $a=0$

Respuestas:

87) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{3^{2n+2}}, -9<x<9$ **88**) $-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{5^{n+1}}, -5<x<5$

89) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n x^n}{3^{n+1}}, -\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{3}{2}$ **90**) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-1)^n}{7^{n+1}}, -6<x<8$

91) $\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\dfrac{x^{2n+1}}{2^{2n+2}}\right], -2<x<2$ **92**) $3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{5^n x^n}{2^{n+1}}, -\dfrac{2}{5}<x<\dfrac{2}{5}$

En los problemas del 93 al 100 calcule la serie de Taylor correspondiente a función f dada en el punto a indicado (Suponga que f tiene un desarrollo en serie de potencias) y determine el intervalo de convergencia.

93. $f(x)=\operatorname{sen} x$, $a=\pi$ **94**. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $a=-1$ **95**. $f(x)=\ln(1+x)$, $a=0$

96. $f(x)=\arctan x$, $a=0$ **97**. $f(x)=x\cdot e^{-2x}$, $a=0$ **98**. $f(x)=\cos(x^2)$, $a=0$

99. $f(x)=\ln x$, $a=1$ **100**. $f(x)=\cos^2 x$, $a=0$

Respuestas:

93) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n-1)!}(x-\pi)^{2n-1}, -\infty<x<\infty$ **94**) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)(x+1)^n, -2<x<0$

95) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}, -1<x\le 1$ **96**) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}, -1\le x\le 1$

97) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n-1}x^n}{(n-1)!}, -\infty<x<\infty$ **98**) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n)!}x^{4n}, -\infty<x<\infty$

99) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-1)^{n+1}}{n+1}, 0<x\le 2$ **100**) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}, -\infty<x<\infty$

Problemas para reforzar la creatividad

1. Construya una sucesión decreciente que converja a 5. Justifique su respuesta.

2. Construya una sucesión creciente que converja a 4. Justifique su respuesta.

3. Dé un ejemplo de dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty}(x_n\, y_n) = 1$.

4. Construya una serie geométrica que converja a 7. Justifique su respuesta.

5. Dé un ejemplo de dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ divergentes tal que $\sum(a_n + b_n)$ converja.

6. Dé un ejemplo de dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergentes tal que la serie $\sum a_n b_n$ diverge.

7. ¿Por qué $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ no es suficiente para garantizar la convergencia de la serie $\sum a_n$?

8. Construya una serie de potencias de *x* que converja para $-\frac{2}{9} < x < \frac{2}{9}$. Justifique su respuesta.

9. Construya una serie de potencias de $x+3$ que converja para $-10 < x < 4$. Justifique su respuesta.

10. Suponga que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} b^n (x+4)^n$ converge en $x=-2$. ¿Por qué se puede asegurar que converge en $x=-5$? ¿Se puede afirmar que también converge en $x=-6$? Justifique su respuesta.

11. Compruebe que, para $\lambda > 0$

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = 1$ **b)** $\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \lambda$

12. Sean $0 < p < 1$ y $q = 1 - p$, demuestre que

a) $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} p = 1$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1} p = \frac{1}{p}$

BIBLIOGRAFÍA

- ANTON, H.,BIVENS, I. Y DAVIS, S. (2009). *Cálculo. Trascendentes Tempranas*. 2ª ed. México: Limusa, S.A. de C. V. Grupo Noriega Editores.

- LARSON, HOSTETLER Y EDWARDS. (2006). *Cálculo* I. 8ª ed. México: McGraw-Hill Interamericana

- LEITHOLD, L. (2008). *El Cálculo.* 7a ed. México: Oxford University Press México, S.A. de C.V.

- PENNEY, E. (2008). *Cálculo con Trascendentes Tempranas*. 7ª ed. México: Pearson Educación de México, S.A. de C. V

- PURCELL, E., VARBERG, D. Y RIGDON, S. (2007). *Cálculo.* 9a ed. México: Pearson Educación de México, S.A. de C. V.

- STEWART, J. (2012). *Cálculo de varias Variables. Trascendentes Tempranas*. 7ª ed. México: Cengage Learning.

- THOMAS, G. (2006). *Cálculo Una Variable*. 11ª ed. México: Pearson Educación de México, S.A. de C. V

- Yu-Takeuchi. (1980) Sucesiones y Series Tomo I y II, México: Editorial Limusa.