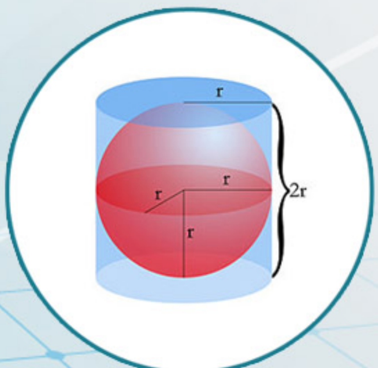
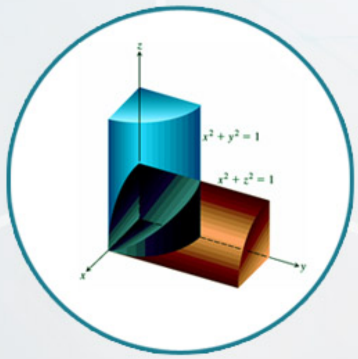
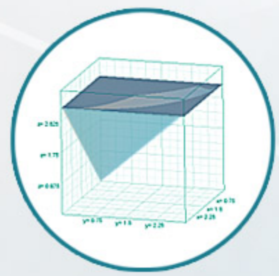
EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES







AÍDA MONTEZUMA, ANA MARÍA RODRÍGUEZ Y NANCY ANDRADES

UNIVERSIDAD METROPOLITANA

EJERCICIOS Y PROBLEMAS
DE FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES

AÍDA MONTEZUMA, ANA MARÍA RODRÍGUEZ Y NANCY ANDRADES

Universidad Metropolitana,
Caracas, Venezuela, 2018

Hecho el depósito de Ley

Depósito Legal:
ISBN:

Formato: 21,5 X 27,9 cms.
Nº de páginas: 222

Diseño de la portada
Anabella Spinetti

A

A la memoria de mí madre, Aída, quien fue ejemplo de constancia y dedicación.

A.M.

A

A mis profesores del Instituto Pedagógico de Caracas y de la Universidad Central de Venezuela, quienes me inculcaron el amor por las matemáticas y por los valores humanos.

A mis alumnos, quienes me motivaron a ser cada día un mejor docente.

A mi hija Carla, por su ayuda constante e incondicional en la transcripción de muchos ejercicios y problemas.

A.M.R

A

A mis colegas Aída y Ana María por brindarme el apoyo y la oportunidad de compartir este proyecto.

A mis estudiantes, razón y motivo de mi crecimiento profesional como docente.

N.A.

INTRODUCCIÓN

La presente publicación ha sido elaborada con el propósito de contribuir y facilitar el aprendizaje de los distintos temas de cálculo diferencial e integral de funciones reales de varias variables.

Al principio de cada capítulo se presenta un resumen de las definiciones, teoremas y propiedades más importantes que se requieren para la resolución de los ejercicios y problemas. En la solución de los problemas se ha tratado de utilizar un lenguaje sencillo, claro y preciso que facilite la comprensión de conceptos, propiedades y teoremas importantes, y que además propicie la adquisición de las destrezas necesarias para realizar cálculos con precisión. Los ejercicios resueltos han sido escogidos de tal forma que involucren los aspectos más importantes de los temas a estudiar en este curso. Se incluyen además ejercicios integradores de asignaturas previas que permitan establecer relaciones entre ellas.

La sección "Problemas propuestos" tiene por finalidad incentivar en el estudiante la revisión y aplicación de los conceptos estudiados y además, que adquiera destrezas técnicas y compruebe por sí mismo el progreso alcanzado.

El libro consta de siete capítulos, contiene 156 ejercicios resueltos y 279 ejercicios propuestos con sus respuestas. Además se incluyen algunas gráficas de regiones planas y superficies en el espacio que son indispensables para visualizar de forma más simple la resolución de algunos problemas. Los contenidos que se desarrollan en cada uno de los siete capítulos se especifican a continuación.

El capítulo I trata acerca del dominio y las gráficas de funciones reales de varias variables. El capítulo II contiene problemas dirigidos a la comprensión del concepto de límite y continuidad de dichas funciones. La diferenciación de funciones se estudia en el capítulo III. El capítulo IV contiene problemas de coordenadas polares. El capítulo V trata las integrales dobles en coordenadas cartesianas y polares. Los problemas acerca de coordenadas cilíndricas y esféricas se encuentran en el capítulo VI. Finalmente, el capítulo VII se dedica a ejercicios y problemas de integrales triples en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

Por último, queremos expresar nuestros mejores deseos para que este material sea útil y esperamos recibir todas las observaciones que se consideren pertinentes que, estamos seguras permitirán mejorar las próximas versiones de este libro.

Nota: Las figuras en tres dimensiones fueron elaboradas con el software MAPLE 12, y las gráficas en dos dimensiones se hicieron con el software GEOGEBRA.

CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN **5**

CONTENIDOS **6**

DOMINIO Y GRÁFICAS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES **7**
DEFINICIONES, PROPIEDADES Y TEOREMAS IMPORTANTES 7
PROBLEMAS RESUELTOS 8
PROBLEMAS PROPUESTOS 28

LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES **34**
DEFINICIONES, PROPIEDADES Y TEOREMAS IMPORTANTES 34
PROBLEMAS RESUELTOS 36
PROBLEMAS PROPUESTOS 52

DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES **56**
DEFINICIONES, PROPIEDADES Y TEOREMAS IMPORTANTES 56
PROBLEMAS RESUELTOS 60
PROBLEMAS PROPUESTOS 103

COORDENADAS POLARES **109**
DEFINICIONES, PROPIEDADES Y TEOREMAS IMPORTANTES 110
PROBLEMAS RESUELTOS 112
PROBLEMAS PROPUESTOS 124

INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS CARTESIANAS Y POLARES **131**
DEFINICIONES, PROPIEDADES Y TEOREMAS IMPORTANTES 131
PROBLEMAS RESUELTOS 132
PROBLEMAS PROPUESTOS 157

COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS **171**
DEFINICIONES, PROPIEDADES Y TEOREMAS IMPORTANTES 171
PROBLEMAS RESUELTOS 172
PROBLEMAS PROPUESTOS 176

INTEGRALES TRIPLES **179**
DEFINICIONES, PROPIEDADES Y TEOREMAS IMPORTANTES 179
PROBLEMAS RESUELTOS 181
PROBLEMAS PROPUESTOS 210

BIBLIOGRAFÍA 222

DOMINIO Y GRÁFICAS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Definiciones, propiedades y teoremas importantes

Definición 1.1: Sea $D \subseteq R^2$, una función *f* real de dos variables reales es una relación que a todo par $(x, y) \in D$, le asigna un único número real $f(x, y)$. El conjunto *D* es el dominio de *f* y su rango es el conjunto de todos los valores que toma $f(x, y)$.

Definición 1.2: Si *f* es una función de dos variables con dominio $D \subseteq R^2$, entonces la gráfica de *f* es el conjunto de todos los puntos P del espacio cuyas coordenadas $(x, y, z) \in R^3$ y verifican las condiciones $z = f(x, y)$ y $(x, y) \in D$.

Definición 1.3: Sea $D \subseteq R^3$, una función *f* real de tres variables reales es una relación que a toda terna $(x, y, z) \in D$, le asigna un único número real $f(x, y, z)$. El conjunto *D* es el dominio de *f* y su rango es el conjunto de todos los valores que toma $f(x, y, z)$.

Definición 1.4.: Las curvas de nivel de una función *f* de dos variables son las curvas de ecuación $f(x, y) = k$, donde *k* es una constante en el rango de *f*.

Problemas resueltos

1. Determine y grafique el dominio de la función *f* definida por $f(x,y)=\sqrt{2x^2+4yx-x-2y}$.

Solución:

La función está definida ($f(x,y)$ es un número real) si $2x^2+4xy-x-2y\geq 0$, es decir

$$\mathrm{Dom}_f=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \,/\, 2x^2+4xy-x-2y\geq 0\right\}$$

Como

$$2x^2+4xy-x-2y\geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+2y)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-1\geq 0 \quad \text{y} \quad x+2y\geq 0 \qquad \text{ó} \qquad 2x-1\leq 0 \quad \text{y} \quad x+2y\leq 0$$

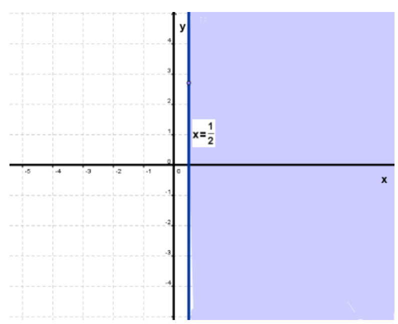
Se tiene que:

$$\mathrm{Dom}_f=\left\{ (x,y)\in \mathrm{R}^2 \Big/ \; x\geq \tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad y\geq -\frac{x}{2} \quad \text{ó} \quad x\leq \tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad y\leq -\frac{x}{2}\right\}$$

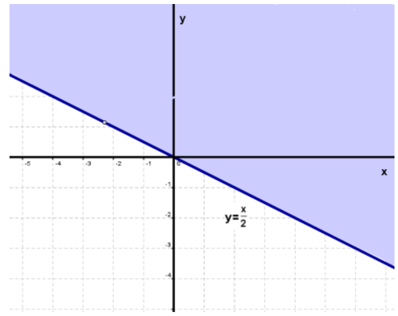
Para graficar el dominio hay que considerar los casos:

Caso I: $x\geq \dfrac{1}{2}$ y $y\geq -\dfrac{x}{2}$.

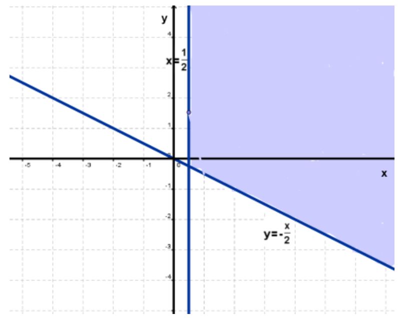
De $x\geq \dfrac{1}{2}$ se obtiene la ecuación $x=\dfrac{1}{2}$ que corresponde a una recta que divide al plano en dos regiones y sólo una de ellas satisface la inecuación dada. Para determinar la región, se selecciona cualquier punto que no esté en la frontera, por ejemplo $P(1,2)$, y se analiza si satisface o no la desigualdad. Como $1>\dfrac{1}{2}$ se tiene que todos los puntos que están del mismo lado de la recta que *P* satisfacen la inecuación $x\geq \dfrac{1}{2}$.



De $y\geq -\dfrac{x}{2}$ se obtiene la ecuación $y=-\dfrac{x}{2}$ que corresponde a una recta que divide al plano en dos regiones y sólo una de ellas satisface la inecuación dada. Para determinar la región, se selecciona cualquier punto que no esté en la frontera, por ejemplo $Q(0,-1)$ y se analiza si satisface o no la desigualdad. Como $-1<0$ se tiene que todos los puntos que están del lado contrario de la recta que *Q* satisfacen la inecuación $y \geq -\frac{x}{2}$.

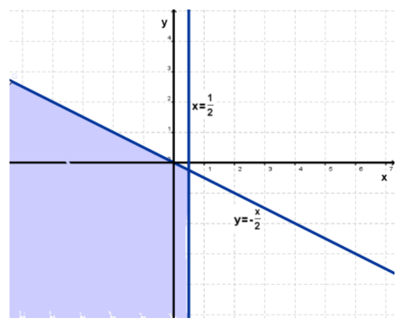


El conjunto de todos los puntos del plano que satisfacen las dos desigualdades $x \geq \frac{1}{2}$ y $y \geq -\frac{x}{2}$ pertenecen a la intersección de las dos regiones anteriores, se obtiene así la región mostrada en la figura.



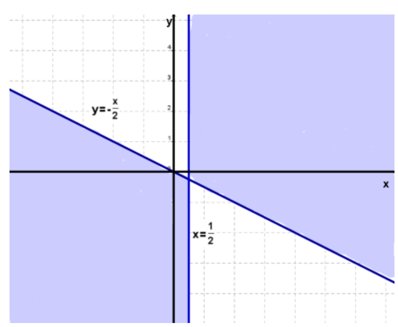
Caso II: $x \leq \frac{1}{2}$ y $y \leq -\frac{x}{2}$.

En este caso se obtienen las ecuaciones de las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $y = -\frac{x}{2}$ que representan las mismas rectas anteriores, siguiendo un procedimiento similar al caso I, resulta que el conjunto de todos los puntos del plano que satisfacen las dos desigualdades $x \leq \frac{1}{2}$ y $y \leq -\frac{x}{2}$ pertenecen a la región mostrada en la figura.



El dominio corresponde al conjunto de todos los puntos del plano que satisfacen uno de los dos casos anteriormente estudiados.

En conclusión, el dominio corresponde a la región sombreada en la figura.



2. Determine y grafique el dominio de la función *h* definida por $h(x, y) = \arccos(xy) + 2^{\frac{x}{\sqrt{1-y}}}$.

Solución:

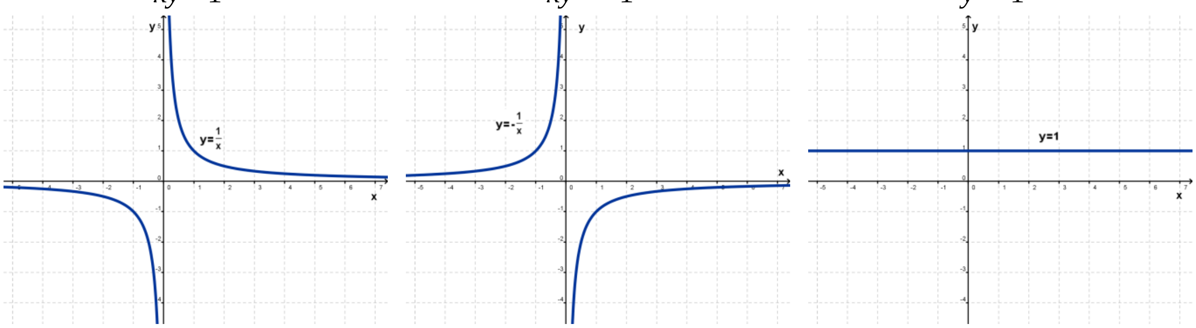
$$
\begin{aligned}
\text{Dom}_h &= \{(x, y) \in R^2 / -1 \le xy \le 1 \quad \text{y} \quad 1 - y > 0\} \\
&= \{(x, y) \in R^2 : -1 \le xy \le 1\} \cap \{(x, y) \in R^2 : y < 1\} \\
&= \{(x, y) \in R^2 : -1 \le xy \quad \text{y} \quad xy \le 1\} \cap \{(x, y) \in R^2 : y < 1\}
\end{aligned}
$$

De las desigualdades involucradas en el dominio se pueden deducir las ecuaciones:

a) $xy = 1$
b) $xy = -1$
c) $y = 1$

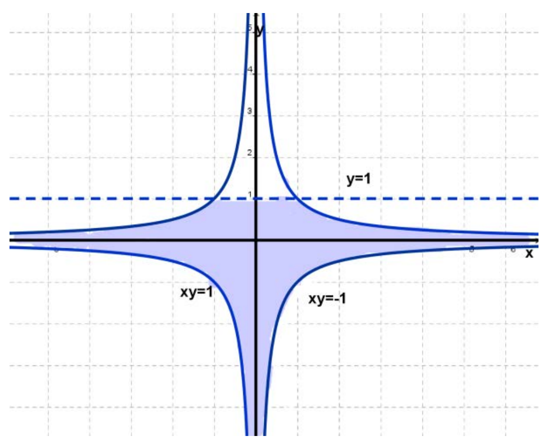
Que al representarlas gráficamente se obtienen las curvas:

$xy = 1$ $\qquad$ $xy = -1$ $\qquad$ $y = 1$



Cada gráfica divide al plano en dos regiones disjuntas. Para seleccionar la región cuyos puntos satisfacen la desigualdad planteada se debe seleccionar un punto convenientemente, como en el ejercicio anterior.

Por lo tanto, el dominio corresponde al conjunto de todos los puntos del plano que satisfacen las tres desigualdades, es decir, el dominio corresponde a la región que se muestra en la figura.



3. Determine y grafique el dominio de la función f definida por $f(x, y) = \ln(y - 1 - |x - 1|) - \sqrt{4x - x^2 - y^2}$.

Solución:

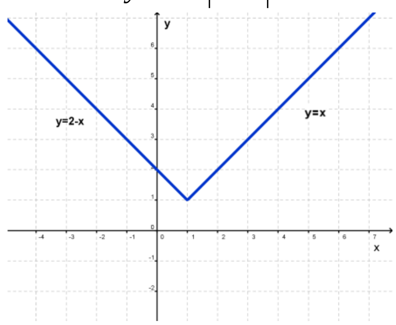
$$\text{Dom}_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ y - 1 - |x-1| > 0 \quad \text{y} \quad 4x - x^2 - y^2 \geq 0\right\}$$

De las desigualdades involucradas en el dominio se pueden deducir las ecuaciones:

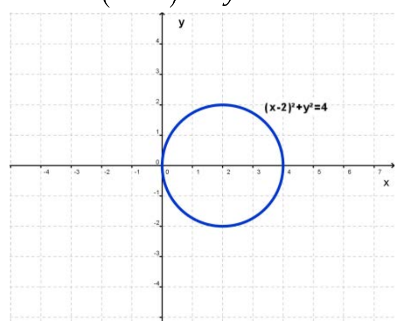
a) $y = 1 + |x-1|$ b) $x^2 + y^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$

Que al representarlas gráficamente se obtiene las curvas:

$y = 1 + |x-1|$



$(x-2)^2 + y^2 = 4$



Cada gráfica divide al plano en dos regiones disjuntas. Para seleccionar la región cuyos puntos satisfacen la desigualdad planteada se debe seleccionar un punto convenientemente.

Observe que

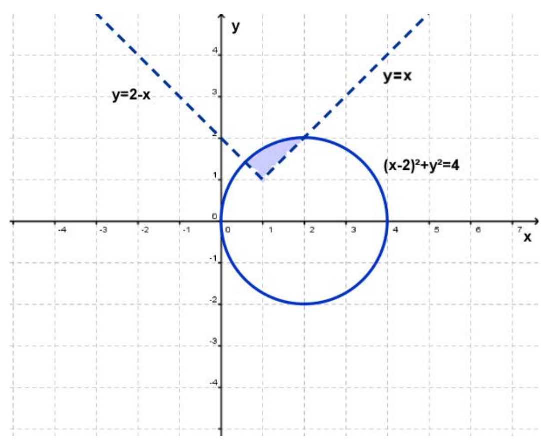
$$4x - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 \leq 4$$

Y

$$y - 1 - |x-1| > 0 \Leftrightarrow y > 1 + |x-1| \quad (*)$$

Luego, el dominio de la función es el conjunto de puntos del círculo de centro $C(2,0)$ y radio 2 que satisfacen la desigualdad (*).

Por lo tanto, el dominio corresponde a la región sombreada en la figura.



4. Determine y grafique el dominio de la función f definida por $f(x,y) = e^{\sqrt{-y}} + \ln\left(5x^2 + 7\sqrt{2}y^2 - \sqrt{2}\right)$.

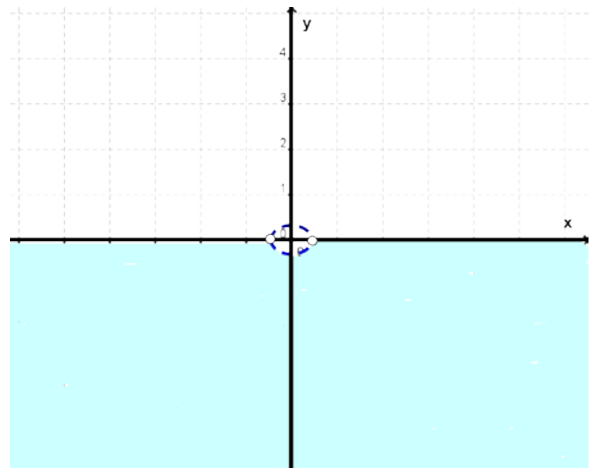
Solución:

$$\text{Dom}_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -y \geq 0 \quad y \quad 5x^2 + 7\sqrt{2}y^2 - \sqrt{2} > 0\right\}$$

$$5x^2 + 7\sqrt{2}y^2 - \sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow 5x^2 + 7\sqrt{2}y^2 > \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{\sqrt{2}}{5}} + \frac{y^2}{\frac{1}{7}} > 1$$

De esta inecuación se obtiene la ecuación $\frac{x^2}{\frac{\sqrt{2}}{5}} + \frac{y^2}{\frac{1}{7}} = 1$ que corresponde a la de una elipse centrada en el origen que interseca al eje *x* en los puntos de coordenadas $\left(-\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{5}}, 0\right)$ y $\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{5}}, 0\right)$ e interseca al eje *y* en los puntos de coordenadas $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$ y $\left(0, \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$.

Luego, el dominio de la función f corresponde a los puntos del exterior de la elipse, que tienen ordenada negativa o igual a 0, es decir, los puntos del exterior de la elipse que están ubicados en el tercer ó cuarto cuadrante o en el eje *x*, como se muestra en la figura.



5. Determine y grafique el dominio de la función f definida por

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{16x - x^2 - y^2 - 28}}{\sqrt{-64 + y + 16x - x^2}}.$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Dom}_f &= \left\{(x, y) \in R^2 \,/\, 16x - x^2 - y^2 - 28 \geq 0 \quad \text{y} \quad -64 + y + 16x - x^2 > 0\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in R^2 \,/ (x-8)^2 + y^2 \leq 36 \quad \text{y} \quad y > (x-8)^2\right\} \end{aligned}$$

De las desigualdades involucradas en el dominio se pueden deducir las ecuaciones:

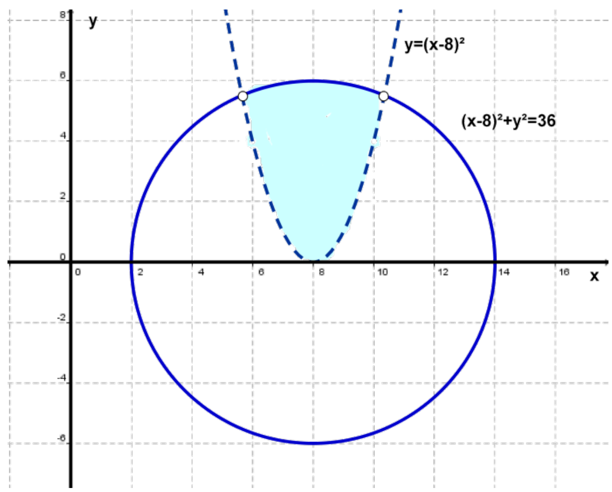
a) $16x - x^2 - y^2 - 28 = 0 \Leftrightarrow y^2 + (x-8)^2 = 36$

b) $-64 + y + 16x - x^2 = 0 \Leftrightarrow y = (x-8)^2$

La primera corresponde a la ecuación de una circunferencia de centro $C(8,0)$ y radio 6, mientras que la segunda corresponde a la ecuación de una parábola que abre hacia arriba y cuyo vértice es el punto $C(8,0)$.

Cada gráfica divide al plano en dos regiones disjuntas. Para seleccionar la región cuyos puntos satisfacen la desigualdad planteada se debe seleccionar un punto convenientemente.

Por lo tanto, el dominio de la función f es el conjunto de todos los puntos del plano que pertenecen a la circunferencia y a su interior, y también son interiores a la parábola como se observa en la región sombreada en la figura.



6. Determine y grafique el dominio de la función *g* definida por $g(x,y)=\ln\left(2-y-x^2\right)-e^{\sqrt{1-x-y^2}}$.

Solución:

$$\mathrm{Dom}_g=\left\{(x,y)\in R^2 \,/\, 2-y-x^2>0 \quad y \quad 1-x-y^2\geq 0\right\}$$
$$\mathrm{Dom}_g=\left\{(x,y)\in R^2 \,/\, 2-y-x^2>0\right\}\cap\left\{(x,y)\in R^2 \,/\, 1-x-y^2\geq 0\right\}$$

Consideremos las ecuaciones

$$2-y-x^2=0 \Leftrightarrow y=2-x^2$$

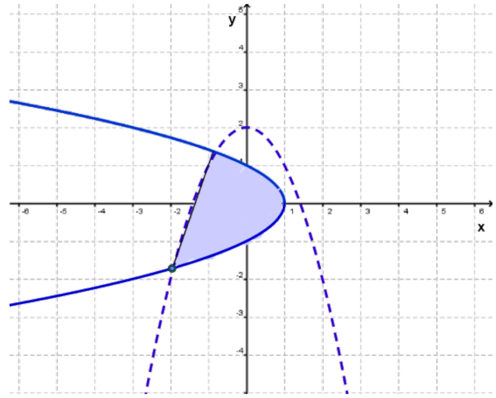
$$1-x-y^2=0 \Leftrightarrow x=1-y^2$$

Al representar gráficamente dichas ecuaciones se obtienen dos parábolas, cada una de las cuales, divide al plano en dos regiones disjuntas, y sólo una de ellas satisface la inecuación planteada.

En conclusión,

$$\mathrm{Dom}_g=\left\{(x,y)\in R^2 \,/\, y<2-x^2 \quad y \quad x\leq 1-y^2\right\}$$

Es decir, es el conjunto de todos los puntos del plano que pertenecen al interior de la parábola de ecuación $y = 2 - x^2$; y al interior y la frontera de la parábola de ecuación $x = 1 - y^2$, mostrada en la región sombreada de la figura.



7. Determine y grafique el dominio de la función *h* definida por $h(x, y) = \operatorname{arcsen}(x + y)$.

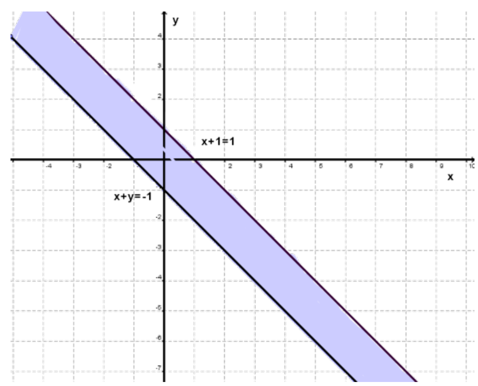
Solución:

$$\operatorname{Dom}_h = \{(x, y) \in R^2 \,/ -1 \leq x + y \leq 1\}$$

De la doble desigualdad $-1 \leq x + y \leq 1$, se obtienen las ecuaciones

$$x + y = 1 \text{ y } x + y = -1$$

Que corresponden a dos rectas en el plano. Cada recta separa el plano en dos semiplanos y al sustituir puntos convenientes se obtiene que, el dominio de la función *h* es el conjunto de todos los puntos del plano que están entre y sobre las dos rectas mostradas en la figura.



8. Determine el dominio de la función *h* definida por $h(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Solución:

$$\operatorname{Dom}_h = \left\{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \neq 0\right\} = R^3 - \{(0, 0\,0)\}$$

9. Determine el dominio de la función *f* definida por $f(x, y, z) = 2 + \tan x + y \cos z$.

Solución:

$$\operatorname{Dom}_f = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z \right\} = R^3 - \left\{ (x, y, z) \in R^3 : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z \right\}$$

10. Determine el dominio de la función *g* definida por $g(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{1-y}+2^{\frac{x}{z}}}{x+3y}$.

Solución:

$$\operatorname{Dom}_g=\{(x,y,z)\in R^3 : 1-y\geq 0\}\cap\{(x,y,z)\in R^3 : x+3y\neq 0\}\cap\{(x,y,z)\in R^3 : z\neq 0\}$$

$$=\left\{(x,y,z)\in R^3 : y\leq 1,\quad z\neq 0,\quad y\neq -\frac{x}{3}\right\}$$

11. Determine y describa el dominio de la función *h* definida por

$$h(x,y,z)=\frac{\arctan(x+y+z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-6x+2z+6}}$$

Solución:

$$1-x-y^2=0\Leftrightarrow x=1-y^2$$

La función *h* está definida ($h(x,y,z)$ es un número real) si y sólo si $x^2+y^2+z^2-6x+2z+6>0$.

Como

$$x^2+y^2+z^2-6x+2z+6>0\Leftrightarrow (x-3)^2+y^2+(z+1)^2>4$$

Se obtiene que el dominio de la función *h* es el conjunto:

$$\operatorname{Dom}_h=\{(x,y,z)\in R^3 : (x-3)^2+y^2+(z+1)^2>4\}$$

Dado que $(x-3)^2+y^2+(z+1)^2=4$ es la ecuación de una esfera de centro $P(3,0,-1)$ y radio 2, el dominio de la función *h* es el conjunto de todos los puntos del espacio que son exteriores a dicha esfera.

12. Determine y grafique el dominio de la función *f* definida por

$$f(x,y)=\sqrt{x}+\ln\left[\left(x^2+y^2\right)\left(-x+2y-\frac{1}{3}\right)\right]$$

Solución:

$$\operatorname{Dom}_f=\left\{(x,y)\in R^2 : x\geq 0\quad \text{y}\quad \left(x^2+y^2\right)\left(-x+2y-\frac{1}{3}\right)>0\right\}$$

i) De $x\geq 0$ se deduce que la región corresponde a todos los puntos del primer y cuarto cuadrante incluyendo el eje *y*.

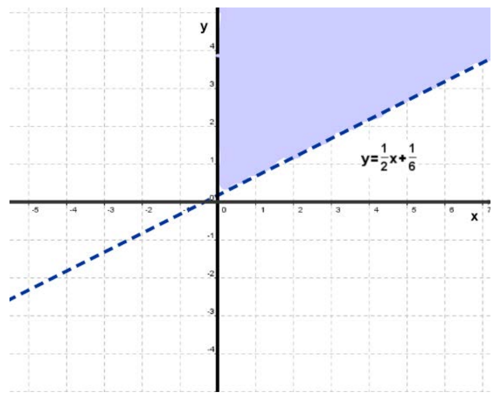
ii) $$\left(x^2+y^2\right)\left(-x+2y-\frac{1}{3}\right)>0 \Rightarrow \left(-x+2y-\frac{1}{3}\right)>0 \quad y \quad (x,y)\neq(0,0)$$

De la desigualdad $-x+2y-\frac{1}{3}>0$ se deduce la ecuación

$$-x+2y-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}$$

Que es la ecuación de una recta en el plano, que lo separa en dos regiones disjuntas. Se puede deducir tomando un punto de una de las regiones, por ejemplo $P(0,1)$, que los puntos que están del mismo lado de la recta que el punto *P* son los que satisfacen la desigualdad.

De i) y ii) al intersecar las dos regiones obtenidas se concluye que el dominio de la función *f* es la región del plano sombreada en la figura.



13. Dadas las funciones f y g definidas por

$$f(x,y)=\sqrt{2x-4y-x^2-y^2-1} \qquad \text{y} \qquad g(x,y)=\frac{5}{y+\sqrt{x}}$$

Considere la función *h* definida por $h(x,y)=f(x,y)g(x,y)$, determine y represente gráficamente el dominio de la función *h*.

Solución:

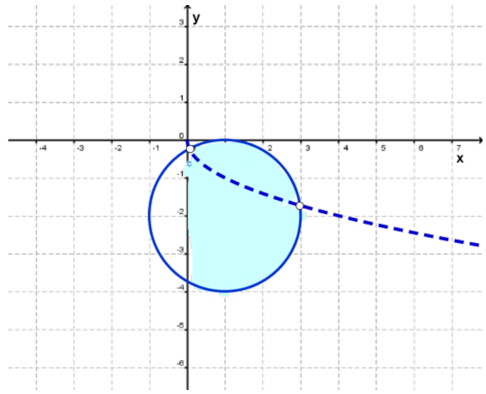
$$\text{Dom}_h=\left\{(x,y)\in R^2 \,/\, 2x-4y-x^2-y^2-1\geq 0 \quad ; \quad y+\sqrt{x}\neq 0 \quad y \quad x\geq 0\right\} \quad (*)$$

$$2x-4y-x^2-y^2-1\geq 0 \Rightarrow x^2+y^2-2x+4y+1\leq 0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2\leq 4$$

$$y+\sqrt{x}=0 \Rightarrow y=-\sqrt{x}$$

$$\text{Dom}_f=\left\{(x,y)\in R^2 \,/ (x-1)^2+(y+2)^2\leq 4\right\}\cap\left\{(x,y)\in R^2 \,/\, y\neq-\sqrt{x}\right\}\cap\left\{(x,y)\in R^2 \,/\, x\geq 0\right\} \quad (**)$$

Y su gráfica se muestra a continuación:



14. Dada la función *f* definida por $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x<0 \quad \text{y} \quad x^2+y^2\leq 1 \\ x^2+3y & \text{si} \quad x\geq 0, \quad y\geq 0 \quad \text{y} \quad x+y<1 \\ 0 & \text{si} \quad 0<x\leq 1 \quad \text{y} \quad -1\leq y<0 \end{cases}$

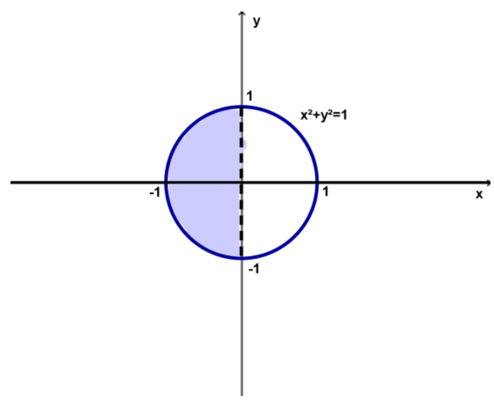
a) Represente gráficamente el dominio de *f*.
b) Halle, en caso de ser posible:

i) $f(0,0)$ **ii**) $f(-1,0)$ **iii**) $f(3,0)$ **iv**) $f\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$ **v**) $f\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ **vi**) $f\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ **v**) $f\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

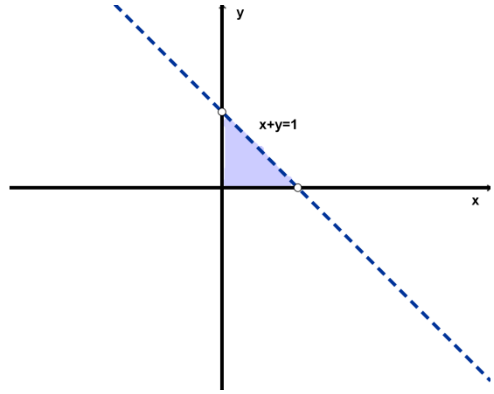
Solución:

a) Para representar gráficamente el dominio de *f* se debe considerar la unión de tres regiones que se obtienen al representar gráficamente las condiciones indicadas en la definición de *f*, que son:

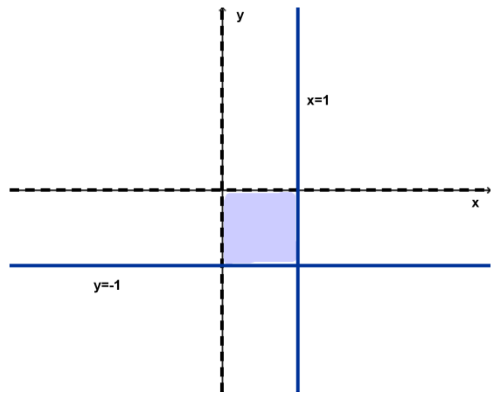
I) $x<0 \quad y \quad x^2+y^2\leq 1$, que corresponden a la región sombreada en la figura.



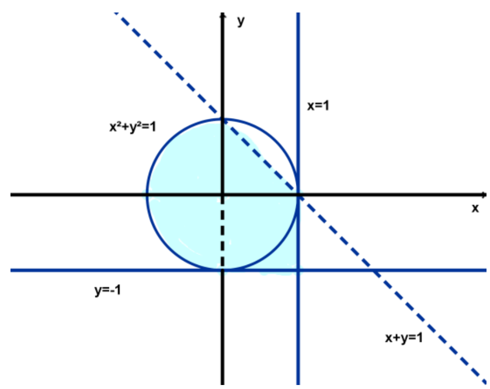
II) $x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad y \quad x + y < 1$, que corresponden a la región sombreada en la figura.



III) $0 < x \leq 1 \qquad y \quad -1 \leq y < 0$, que corresponden a la región sombreada en la figura.



De I), II) y III) se tiene que la representación del dominio de *f* viene dada por la región sombreada en la figura.



b) i) $f(0,0) = 0^2 + 3 \cdot 0 = 0$ ya que $x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad y \quad x + y < 1$

ii) $f(-1,0) = \dfrac{1}{-1} = -1$ ya que $x < 0 \quad y \quad x^2 + y^2 \leq 1$

iii) $f(3,0)$ no existe ya que $(3,0) \notin \mathrm{Dom}_f$

iv) $f\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + 3 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{25}{16}$ ya que $x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad y \quad x + y < 1$

v) $f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=0$ ya que $0<x\leq 1 \quad y \quad -1\leq y<0$

vi) $f\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ no existe ya que $\left(0,-\frac{1}{2}\right)\notin \mathrm{Dom}_f$

v) $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ no existe ya que $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\notin \mathrm{Dom}_f$

15. Determine el dominio, el rango y grafique la función *f* definida por $f(x,y)=-3+x^2+y^2$.
Solución:

El dominio de la función *f* es

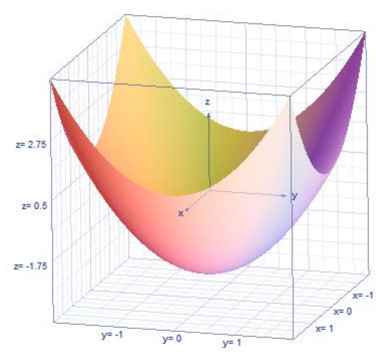
$$\mathrm{Dom}_f = R^2$$

Para obtener el rango, observe que $x^2+y^2\geq 0$, y por lo tanto, las imágenes son todas mayores o iguales que -3, en consecuencia

$$\mathrm{Rg}_f = [-3,+\infty)$$

Para obtener la gráfica de la función se considera $z=f(x,y)$.

Como $z=-3+x^2+y^2$ es la ecuación de un paraboloide que abre hacia arriba y que interseca al eje *z* en el punto $(0,0,-3)$ se tiene que la gráfica de la función es la superficie mostrada en la figura.



16. Determine el dominio, el rango y grafique la función *f* definida por $f(x,y)=1-y^2$.

Solución:

El dominio de la función *f* es el conjunto

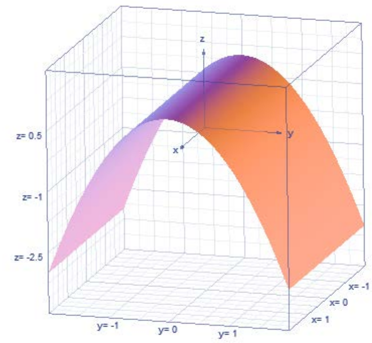
$$\mathrm{Dom}_f = R^2$$

Para obtener el rango, observe que $-y^2\leq 0$, y por lo tanto, las imágenes son todas menores o iguales que 1, en consecuencia

$$\mathrm{Rg}_f = (-\infty,1]$$

Para obtener la gráfica de la función se considera $z = f(x,y)$.

Como $z = 1 - y^2$ no depende de *x*, la ecuación corresponde a una superficie que se extiende paralelamente al eje *x*, y cuya proyección en el plano *yz* es la parábola de ecuación $z = 1 - y^2$, que abre hacia abajo y que interseca al eje *z* en el punto $(0,0,1)$. En consecuencia, la gráfica de la función es la superficie mostrada en la figura anexa.



17. Determine el dominio, el rango y grafique la función *f* definida por $f(x,y) = 2 + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Solución:

$f(x,y)$ es un número real si $9 - x^2 - y^2 \geq 0$.

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9$$

Luego, el dominio de la función *f* es el conjunto

$$\text{Dom}_f = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 9\}$$

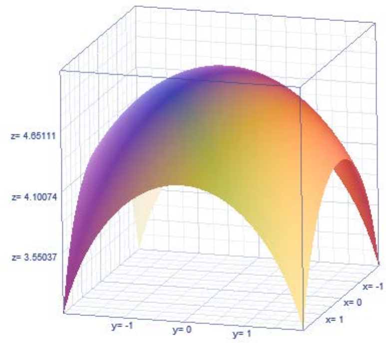
Como $0 \leq \sqrt{9 - (x^2 + y^2)} \leq 3$ se tiene que $2 \leq 2 + \sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 5$, en consecuencia

$$\text{R}g_f = [2,5]$$

Para obtener la gráfica de la función se considera $z = f(x,y)$.

$$z = 2 + \sqrt{9 - x^2 - y^2} \Rightarrow z - 2 = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \Rightarrow (z-2)^2 = 9 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$$

La ecuación $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$ corresponde a la de una esfera de centro $C(0,0,2)$ y radio 3, luego, la gráfica de la función *f* corresponde al casquete superior de la esfera que se muestra en la siguiente figura.



18. Determine e identifique la ecuación de la curva de intersección de las gráficas de las funciones f y g definidas por $f(x,y)=x^2+y^2$ y $g(x,y)=9-x^2-y^2$.

Solución:

$$x^2+y^2=9-x^2-y^2 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2=9 \Leftrightarrow x^2+y^2=\frac{9}{2}$$

Y

$$x^2+y^2=\frac{9}{2} \Rightarrow z=\frac{9}{2}, \text{ ya que } x^2+y^2=z$$

Las gráficas se intersecan en una circunferencia de ecuación

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{9}{2} \\ z=\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

Observe que la circunferencia queda en el plano de ecuación $z=\frac{9}{2}$.

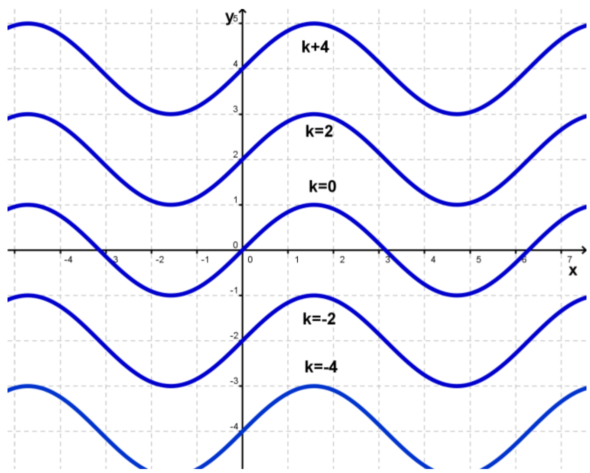
19. Sea f el campo escalar definido por $f(x,y)=y-\operatorname{sen} x$. Dibuje las curvas de nivel para $k=0,-2,2,-4,4$.

Solución:

Las curvas de nivel son las gráficas en el plano *xy* de ecuaciones de la forma $f(x,y)=k$, es decir,

$$y-\operatorname{sen} x=k \quad \text{ó} \quad y=k+\operatorname{sen} x$$

Las curvas de nivel, para los valores de *k* indicados se muestran en la figura.



20. Sea f el campo escalar definido por $f(x,y)=x^2+y^2+6x-4y+13$. Dibuje e identifique las curvas de nivel para $k=0,1,2,3$.

Solución:

Las curvas de nivel son las gráficas en el plano xy de ecuaciones de la forma $f(x,y)=k$, es decir,

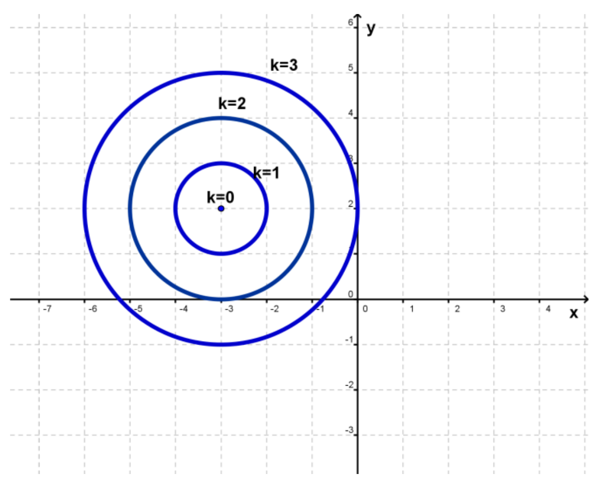
$$x^2+y^2+6x-4y+13=k$$

ó

$$(x+3)^2+(y-2)^2=k$$

Las curvas de nivel, para los valores de *k* indicados se muestran en la figura.

Observe que estas son circunferencias de centro $(-3,2)$ para $k>0$.



21. Una placa plana rectangular de metal está ubicada en el plano *xy* de forma tal que la temperatura $T(x,y)$ en cualquier punto de la placa es inversamente proporcional a la distancia del punto $P(x,y)$ (de la placa) al origen.

a) Halle la función que define la temperatura $T(x,y)$ en cualquier punto de la placa.

b) Si $k=1$, halle y grafique para $k=\frac{1}{2},1,2$ las curvas *isotérmicas*.

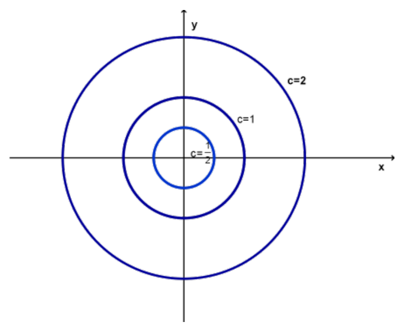
c) Determine el dominio de $T(x,y)$. Diga el significado físico del dominio de la función *T* respecto a la placa.

Solución:

a) La distancia de un punto $P(x,y)$ al origen viene dada por $\sqrt{x^2+y^2}$. Como la temperatura en *P* es inversamente proporcional a la distancia al origen, resulta

$$T(x,y)=\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

b) Si $k=1$, las isotermas para $k=\frac{1}{2},1,2$ son circunferencias concéntricas de centro (0,0) y radios 2, 1 y $\frac{1}{2}$ respectivamente, como se observan en la figura.

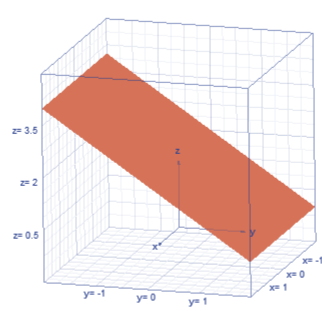


c) $\mathrm{Dom}_T=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. Interpretación física: La temperatura permanece constante a lo largo de las curvas isotérmicas y se observa que a medida que las curvas isotérmicas se alejan de la fuente, la temperatura disminuye. Pero a medida que las curvas se acercan al origen la temperatura aumenta, esto nos dice que en ese punto hay una concentración de calor, o sea, una ***fuente***.

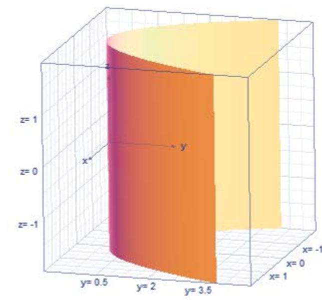
22. **a**. Identifique y grafique las superficies de ecuaciones $y+z=2$ y $y=x^2$.
b. Grafique el sólido limitado por las superficies dadas y el plano *xy*.
c. Halle la proyección del sólido en el plano *xz*.

Solución:

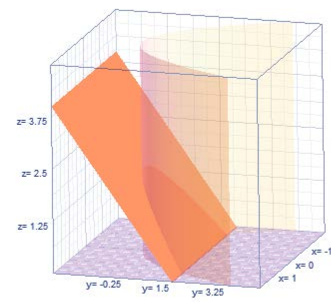
a) Como $y+z=2$ no depende de *x*, la ecuación corresponde a un plano que se extiende paralelamente al eje *x*, y cuya proyección en el plano *yz* es la recta de ecuación $y+z=2$. La gráfica de la superficie se muestra en la figura.



Como $y = x^2$ no depende de *z*, la ecuación corresponde a una superficie que se extiende paralelamente al eje *z*, y cuya proyección en el plano *xy* es la parábola de ecuación $y = x^2$. La gráfica de la superficie se muestra en la figura.



b) El sólido resultante es la región del espacio limitado por las dos superficies dadas y el plano *xy* como se observa en la figura.



c) Para hallar la proyección del sólido en el plano *xz* se debe determinar la curva de intersección de ambas superficies, y para ello se debe resolver el sistema de ecuaciones

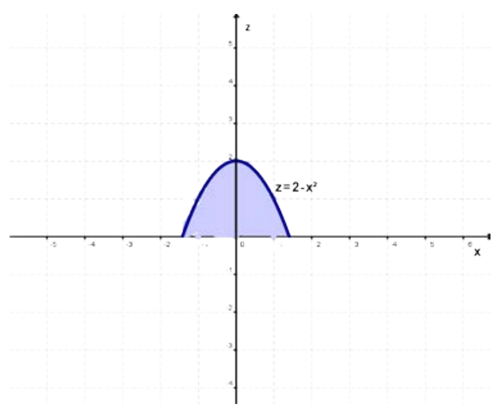
$$\begin{cases} y + z = 2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$y + z = 2 \Rightarrow y = 2 - z$$

Al sustituir el valor de *y* en la segunda ecuación se obtiene la parábola de ecuación

$$2 - z = x^2 \quad \text{ó} \quad z = 2 - x^2$$

Luego, la proyección del sólido en el plano *xz* es la región mostrada en la figura.



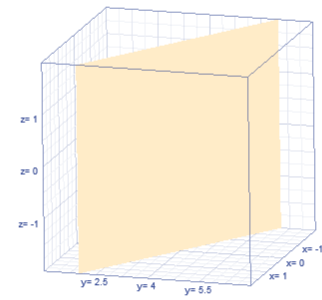
23. **a**. Identifique y grafique las superficies de ecuaciones $x + y = 4$ y $z = 4 - x^2$.

b. Grafique el sólido que está en el primer octante limitado por las superficies dadas.

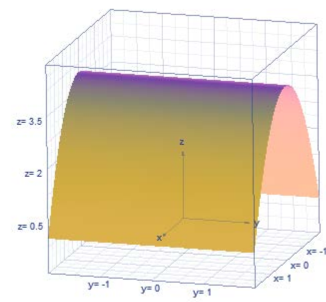
c. Halle la proyección del sólido en el plano *yz*, y dibuje la proyección de la curva de intersección de ambas superficies.

Solución:

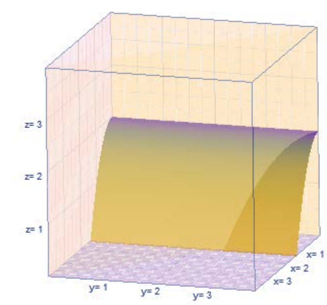
a) Como $x+y=4$ no depende de *z*, la ecuación corresponde a un plano que se extiende paralelamente al eje *z*, y cuya proyección en el plano *xy* es la recta de ecuación $x+y=4$. La gráfica de la superficie se muestra en la figura.



Como $z=4-x^2$ no depende de *y*, la ecuación corresponde a una superficie que se extiende paralelamente al eje *y*, y cuya proyección en el plano *xz* es la parábola de ecuación $z=4-x^2$. La gráfica de la superficie se muestra en la figura.



El sólido resultante es la región del espacio limitado por las dos superficies dadas y los planos coordenados como se observa en la figura.



c) Para hallar la proyección del sólido en el plano *yz* se debe determinar la curva de intersección, y para ello se debe resolver el sistema de ecuaciones

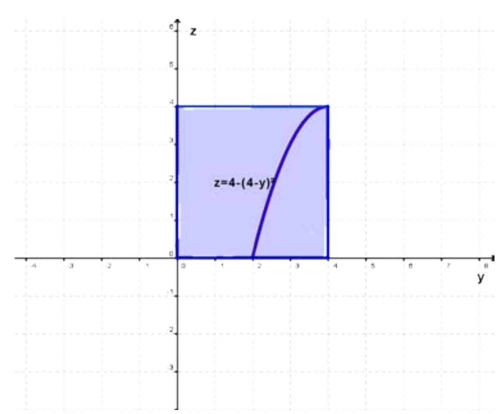
$$\begin{cases} x+y=4 \\ z=4-x^2 \end{cases}$$

$$x+y=4 \Rightarrow x=4-y$$

Al sustituir el valor de *x* en la segunda ecuación se obtiene la parábola de ecuación

$$z=4-(4-y)^2$$

Luego, la proyección del sólido en el plano *yz* es la región mostrada en la figura.



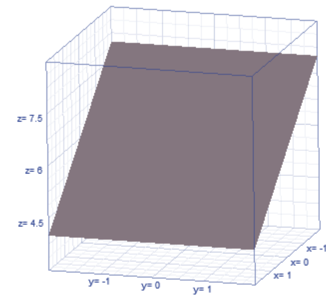
24. **a**. Identifique y grafique las superficies de ecuaciones $x+z=6$ y $x=4-y^2$.

b. Grafique el sólido que está en el primer octante limitado por las superficies dadas.

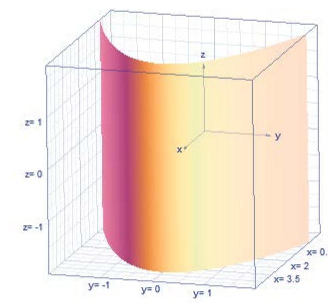
c. Halle la proyección del sólido en el plano *yz*, y dibuje la proyección de la curva de intersección de ambas superficies.

Solución:

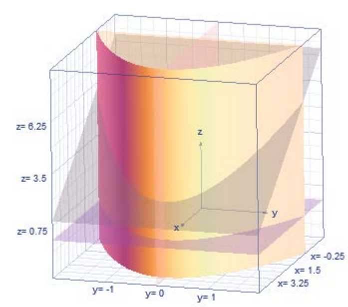
a) Como $x + z = 6$ no depende de *y*, la ecuación corresponde a un plano que se extiende paralelamente al eje *y*, y cuya proyección en el plano *xz* es la recta de ecuación $x + z = 6$. La gráfica de la superficie se muestra en la figura.



Como $x = 4 - y^2$ no depende de *z*, la ecuación corresponde a una superficie que se extiende paralelamente al eje *z*, y cuya proyección en el plano *xy* es la parábola de ecuación $x = 4 - y^2$. La gráfica de la superficie se muestra en la figura.



b) El sólido resultante es la región del espacio limitado por las superficies dadas como se observa en la figura.



c) Para hallar la proyección del sólido en el plano yz se debe determinar la curva de intersección, y para ello se debe resolver el sistema de ecuaciones

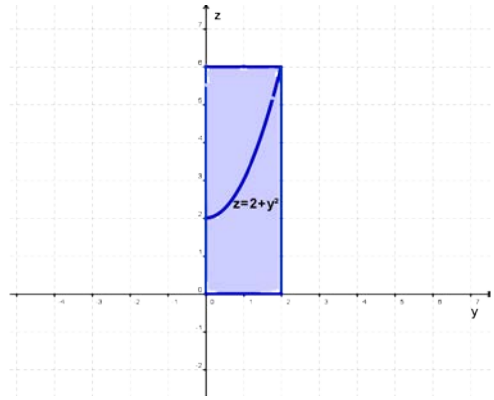
$$\begin{cases} x + z = 6 \\ x = 4 - y^2 \end{cases}$$

$$x + z = 6 \Rightarrow x = 6 - z$$

Al sustituir el valor de *x* en la segunda ecuación se obtiene la parábola de ecuación

$$z = 2 + y^2$$

Luego, la proyección del sólido en el plano *yz* es la región mostrada en la figura.



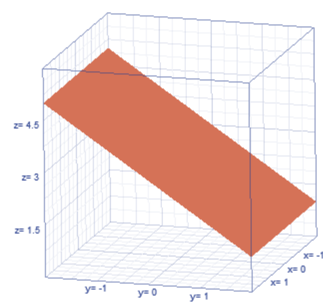
25. **a**. Identifique y grafique las superficies de ecuaciones $y + z = 3$ y $z = 1 - x^2$.

b. Grafique el sólido limitado por las superficies dadas y por los planos de ecuaciones $y = 0$ y $z = 0$.

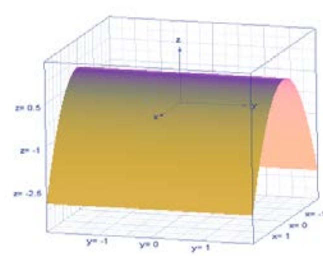
c. Halle la proyección del sólido en el plano *xy*, y dibuje la proyección de la curva de intersección las superficies dadas en a).

Solución:

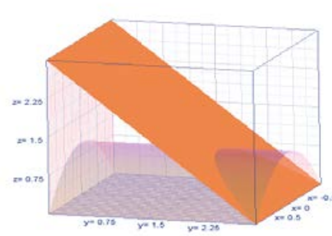
a) Como $y + z = 3$ no depende de *x*, la ecuación corresponde a un plano que se extiende paralelamente al eje *x*, y cuya proyección en el plano *yz* es la recta de ecuación $y + z = 3$. La gráfica de la superficie se muestra en la figura.



Como $z = 1 - x^2$ no depende de *y*, la ecuación corresponde a una superficie que se extiende paralelamente al eje *y*, y cuya proyección en el plano *xz* es la parábola de ecuación $z = 1 - x^2$. La gráfica de la superficie se muestra en la figura.



El sólido resultante es la región del espacio limitado por las tres superficies dadas como se observa en la figura.



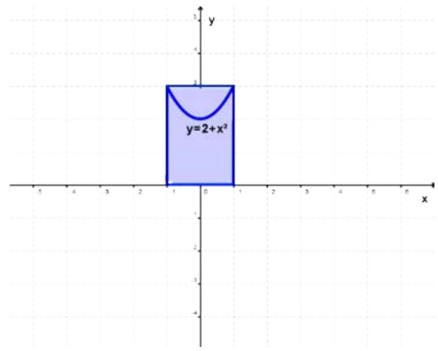
c) Para hallar la proyección del sólido en el plano *xy* se debe determinar la curva de intersección, y para ello se debe resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y + z = 3 \\ z = 1 - x^2 \end{cases}$$

$$y + z = 3 \Rightarrow z = 3 - y$$

Al sustituir el valor de *z* en la segunda ecuación se obtiene la parábola de ecuación $y = 2 + x^2$

Luego, la proyección del sólido en el plano *xy* es la región mostrada en la figura.



26. Dadas las funciones *f*, *g*, *h* y *t* definidas por $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = x^2 - y^2$, $h(x) = \cos x$ y $t(x) = \operatorname{sen} x$, halle, si es posible:

a) $(f+g)(x,y)$ **b**) $t(g(x,y))$ **c**) $g(f(x,y), g(x,y))$ **d**) $f(g(x,y))$ **e**) $f(h(x), t(x))$

Solución:

a) $(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y) = x^2 + y^2 + x^2 - y^2 = 2x^2$

b) $t(g(x,y)) = t(x^2 - y^2) = sen(x^2 - y^2)$

c) $g(f(x,y), g(x,y)) = g(x^2 + y^2, x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2$

d) $f(g(x,y))$ no se puede calcular ya que $g(x,y)$ es un escalar (un número real) y f es una función de dos variables.

e) $f(h(x), t(x)) = f(\cos x, \operatorname{sen} x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$

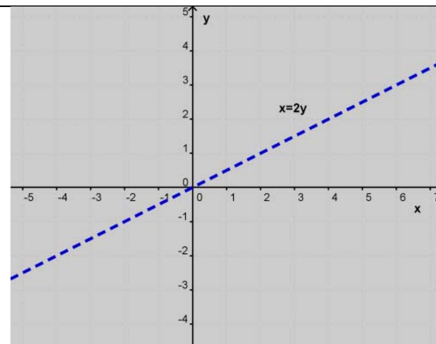
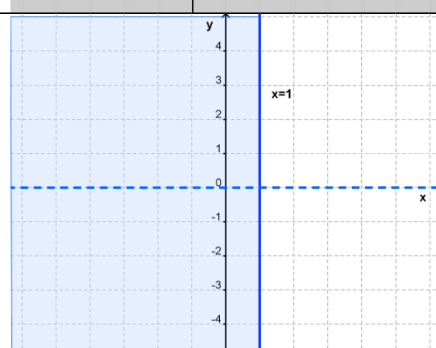
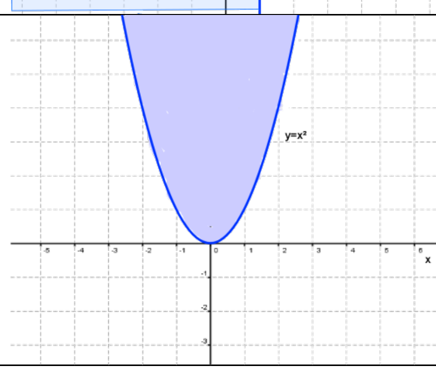
Problemas propuestos

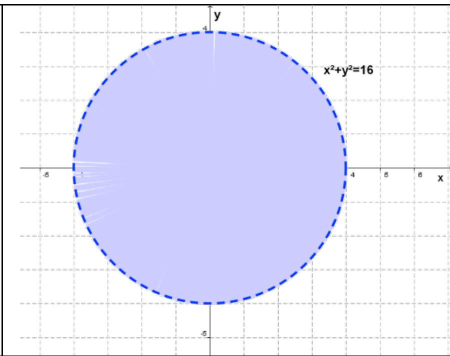
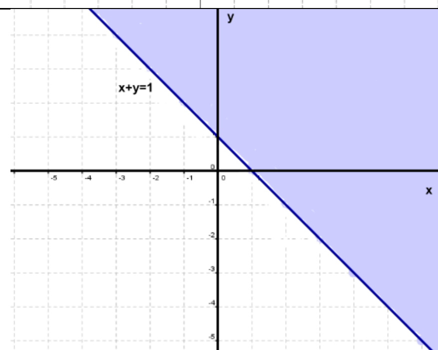
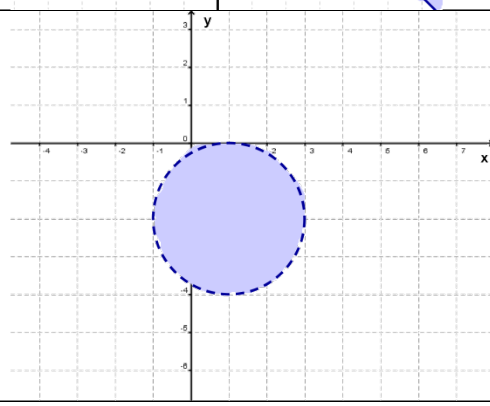
En los problemas del 1 al 6 determine y grafique el dominio de la función definida.

1. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x-2y}$ **2.** $f(x,y)=\sqrt{1-x}-e^{\frac{x}{y}}$ **3.** $g(x,y)=\sqrt{y-x^2}$

4. $h(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$ **5.** $f(x,y)=\sqrt{\ln(x+y)}$ **6.** $f(x,y)=\dfrac{2}{\sqrt[4]{2x-4y-x^2-y^2-1}}$

Respuestas:

1) $\text{Dom}_f=\{(x,y)\in \text{IR}^2/x-2y\neq 0\}$	
2) $\text{Dom}_f=\{(x,y)\in \text{R}^2/y\neq 0 \text{ y } x\leq 1\}$	
3) $\text{Dom}_g=\{(x,y)\in \text{R}^2/\ y\geq x^2\}$	

4) $\text{Dom}_h = \left\{ (x, y) \in \mathrm{R}^2 / \ x^2 + y^2 < 16 \right\}$	
5) $\text{Dom}_f = \left\{ (x, y) \in R^2 : y \geq 1 - x \right\}$	
6) $\text{Dom}_f = \left\{ (x, y) \in R^2 / (x-1)^2 + (y+2)^2 < 4 \right\}$	

En los problemas del 7 al 12 determine el dominio de la función definida.

7. $g(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y}{z - 2}$

8. $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}}$

9. $g(x, y, z) = \dfrac{10}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 4z + 4}}$

10. $h(x, y, z) = \ln\left(16 - x^2 + y^2 + z^2\right)$

11. $f(x, y, z) = e^{\frac{x}{z^2 - 1}} + \sqrt{4 - y^2}$

12. $h(x, y, z) = \arctan\left(\dfrac{1}{|zx - 4|} \right)$

Respuestas: **7)** $\text{Dom}_g = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : z \neq 2 \right\}$ **8)** $\text{Dom}_f = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 9 \right\}$

9) $\text{Dom}_g = \left\{ (x, y, z) \in \mathrm{R}^3 / \ x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 > 4 \right\}$ **10)** $\text{Dom}_h = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : x^2 - y^2 - z^2 < 16 \right\}$

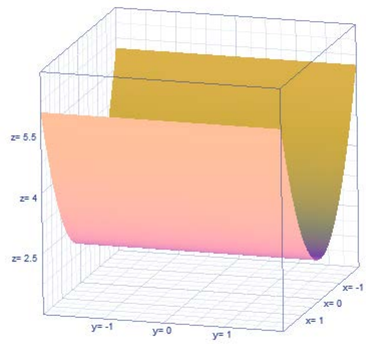
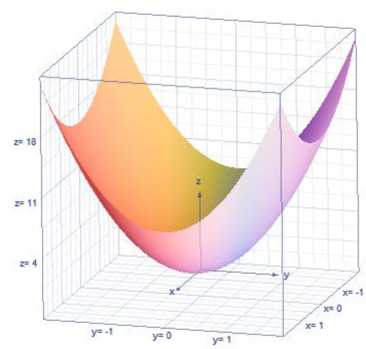
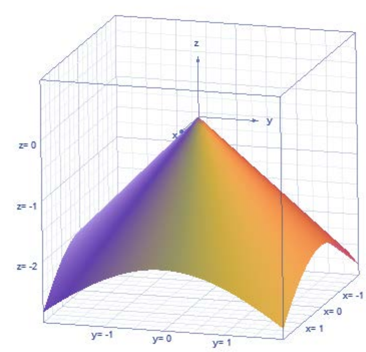
11) $\text{Dom}_f = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : z \neq 1 \quad y \quad z \neq -1 \quad y \quad |y| < 2 \right\}$ **12)** $\text{Dom}_h = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : xz \neq 4 \right\}$

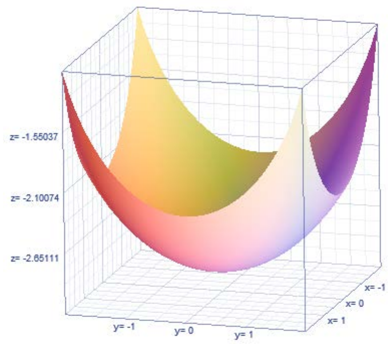
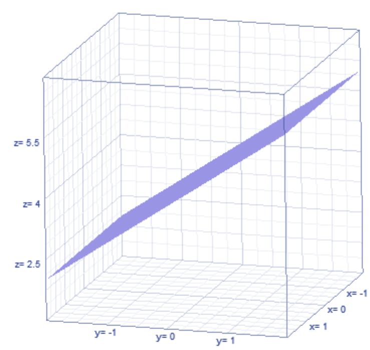
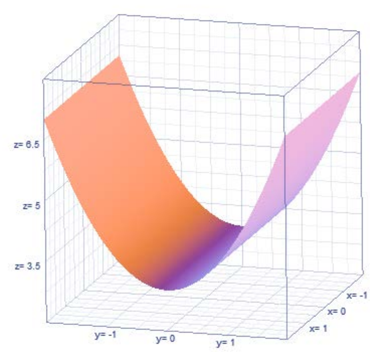
En los problemas del 13 al 18 determine el dominio, el rango y grafique la función definida.

13. $f(x,y)=2+x^2$ **14**. $f(x,y)=2x^2+4y^2$ **15**. $f(x,y)=-\sqrt{x^2+y^2}$

16. $f(x,y)=-\sqrt{9-x^2-y^2}$ **17**. $f(x,y)=4+y$ **18**. $f(x,y)=3+y^2$

Respuestas:

13)	$\text{Dom}_f = R^2$ $\text{R}_f = [2,+\infty)$	
14)	$\text{Dom}_f = R^2$ $\text{R}_f = [0,+\infty)$	
15)	$\text{Dom}_f = R^2$ $\text{R}_f = (-\infty,0]$	

16)	$\text{Dom}_f = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 9\}$ $\text{R}_f = (-\infty, 0]$	
17)	$\text{Dom}_f = R^2$ $\text{R}_f = R$	
18)	$\text{Dom}_f = R^2$ $\text{R}_f = [3, +\infty)$	

En los problemas del 19 al 22 identifique y dibuje las curvas de nivel de los campos escalares definidos para los valores de k indicados.

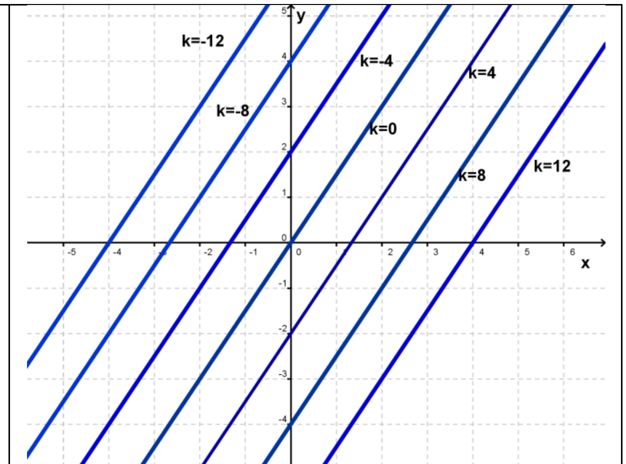
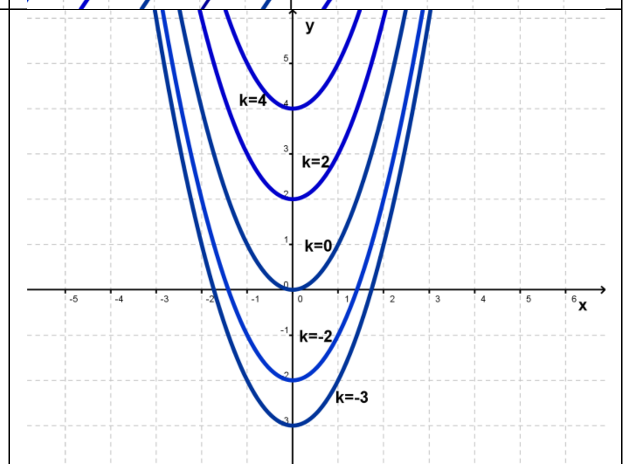
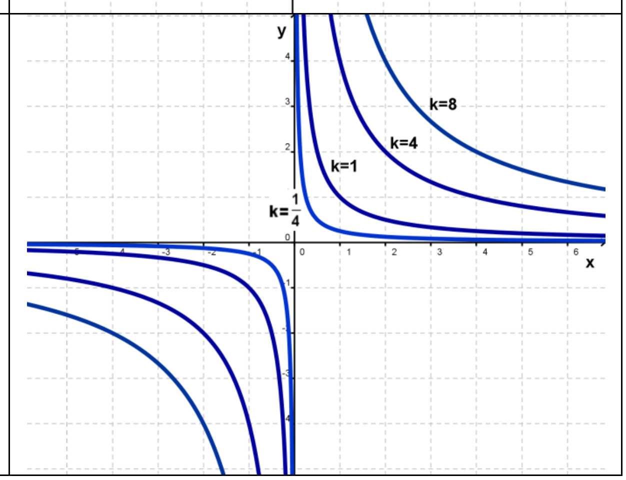
19. $f(x, y) = 3x - 2y\,; k = 0, -4, 4, -8, 8, -12, 12$

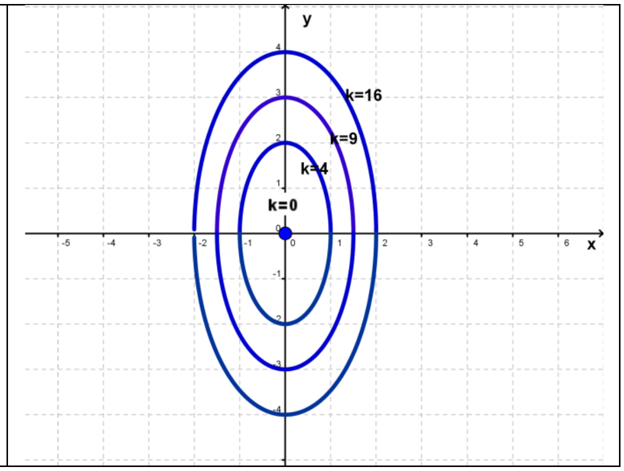
20. $f(x, y) = y - x^2\,; k = 0, -2, 2, -3, 4$

21. $f(x, y) = xy\,; k = \frac{1}{4}, 1,\ 4, 8$

22. $f(x, y) = 4x^2 + y^2\,; k = 0, 4, 9, 16$

Respuestas*:*

19) Las curvas de nivel son las gráficas de las ecuaciones de la forma $$y=\frac{3}{2}x+\frac{k}{2}$$ en el plano *xy*. Estas son rectas paralelas.	
20) Las curvas de nivel son las gráficas de las ecuaciones de la forma $$y=x^2+k$$ en el plano *xy*. Estas son parábolas.	
21) Las curvas de nivel son las gráficas de las ecuaciones de la forma $$y=\frac{k}{x},\ x\neq 0$$ en el plano *xy*. Estas son hipérbolas.	

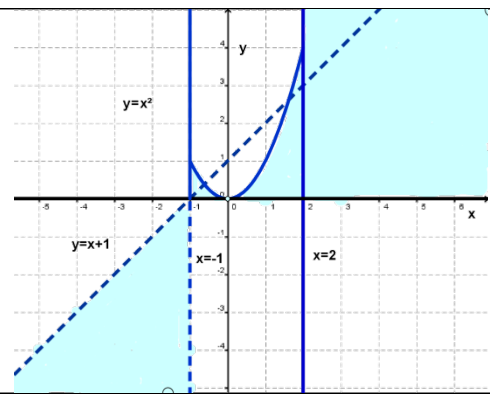
22) Las curvas de nivel son las gráficas de las ecuaciones de la forma $$4x^2 + y^2 = k$$ en el plano *xy*. Estas son elipses para $k > 0$, centradas en el origen.	

23. Dada la función *g* definida por $g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x<-1 \quad \text{y} \quad y-x-1<0 \\ 0 \quad \text{si} \quad 0\le y\le x^2 & \text{y} \quad -1\le x<2 \\ \dfrac{1}{x^2+y^2-1} & \text{si} \quad x\ge 2 \quad \text{y} \quad y\ge 0 \end{cases}$

a) Represente gráficamente el dominio de *g*.

b) Halle, en caso de ser posible,: $g(0,0)$; $g(1,0)$; $g(0,-6)$; $g(0,4)$; $g(-5,-1)$; $g(3,5)$; $g(-3,-4)$.

Respuesta:

$g(0,0)=0$; $g(1,0)=0$; $g(0,-6)$ no existe ; $g(0,4)$ no existe; $g(-5,-1)$ no existe; $g(3,5)=\dfrac{1}{33}$; $g(-3,-4)=-\dfrac{1}{2}$.	

LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Definiciones, propiedades y teoremas importantes

Definición 2.1: Sea *f* una función real de dos variables reales definida en un disco abierto con centro (a,b), excepto quizás en (a,b), y sea *L* un número real. Se dice que el límite de $f(x,y)$, cuando (x,y) tiende a (a,b) es *L*, y se escribe $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$, si para todo número positivo ε existe un número positivo δ tal que

$$|\,f(x,y)-L\,|<\varepsilon \text{ si } 0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$$

Teorema 2.1: Si $f(x,y)\to L_1$ cuando $(x,y)\to(a,b)$ a lo largo de la trayectoria C_1 y si $f(x,y)\to L_2$ cuando $(x,y)\to(a,b)$ a lo largo de la trayectoria C_2, donde $L_1\neq L_2$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ no existe.

Definición 2.2: Sea *f* una función real de dos variables reales definida en (a,b). Entonces la función *f* es continua en (a,b) sí y solo si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$. Se dice que *f* es continua en un conjunto *D* si es continua en todos los puntos $(a,b)\in D$.

Teorema 2.2: Toda función polinomial de dos variables es continua en R^2.

Teorema 2.3: Toda función racional de dos variables es continua excepto en los puntos que anulan el denominador.

Teorema 2.4: Si *k* es un número real y *f* y *g* son dos funciones reales continuas en (a,b), entonces las funciones kf, $f\pm g$, fg, f/g, si $g(a,b)\neq 0$, son continuas en (a,b).

Teorema 2.5: Si *f* una función real continua en (a,b) y *g* una función real de una variable continua en $f(a,b)$, entonces, la compuesta $h=g\circ f$ es continua en (a,b).

Definición 2.3: Sea *f* una función real de tres variables reales definida en una esfera abierta con centro (a,b,c), excepto quizás en (a,b,c). Se dice que el límite de $f(x,y,z)$, cuando (x,y,z) tiende a (a,b,c) es *L*, y se escribe $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)=L$, si para todo número positivo ε existe un número positivo δ tal que

$$|\,f(x,y,z)-L\,|<\varepsilon \text{ si } 0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}<\delta$$

Teorema 2.6: Si $f(x,y,z) \to L_1$ cuando $(x,y,z) \to (a,b,c)$ a lo largo de la trayectoria C_1 y si $f(x,y,z) \to L_2$ cuando $(x,y,z) \to (a,b,c)$ a lo largo de la trayectoria C_2, donde $L_1 \neq L_2$, entonces $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)$ no existe.

Definición 2.4: Sea *f* una función real de tres variables reales definida en (a,b,c). Entonces la función *f* es continua en (a,b,c) sí y solo si $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = f(a,b,c)$. Se dice que *f* es continua en un conjunto *D* si es continua en todos los puntos $(a,b,c) \in D$.

Teorema 2.7: Toda función polinomial de tres variables es continua en R^3.

Teorema 2.8: Toda función racional de tres variables es continua excepto en los puntos que anulan el denominador.

Teorema 2.9: Si *k* es un número real y *f* y *g* son dos funciones continuas en (a,b,c), entonces las funciones kf , $f \pm g$, fg , f/g , si $g(a,b,c) \neq 0$, son continuas en (a,b,c).

Teorema 2.10: Si *f* una función real continua en (a,b,c) y *g* una función real de una variable continua en $f(a,b,c)$, entonces, la compuesta $h = g \circ f$ es continua en (a,b,c).

Problemas resueltos

1. Dada la función *g* definida por $g(x,y)=\dfrac{3xy}{x^2+y^2}$

i) Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ en cada caso:

a) A lo largo de la recta de ecuación $x=0$.
b) A lo largo de la recta de ecuación $y=x$.
c) A lo largo de la recta de ecuación $x=\dfrac{y}{2}$.
d) A lo largo de la parábola de ecuación $y=x^2$.
e) Concluya acerca de la existencia del límite entorno al origen.

ii) Estudie el comportamiento de $g(x,y)$ alrededor de $(0,0)$ a lo largo del haz de rectas de ecuación $y=ax$. Escriba su conclusión.

Solución:

Si $(x,y)\to(0,0)$ entonces $3xy\to 0$ y $x^2+y^2\to 0$, y se obtiene una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$.

i) **a**) $\lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} \dfrac{3\cdot 0\cdot y}{0^2+y^2}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0}{y^2}=\lim\limits_{y\to 0} 0=0$

b) $\lim\limits_{(x,x)\to(0,0)} \dfrac{3xx}{x^2+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$

c) $\lim\limits_{\left(\frac{y}{2},y\right)\to(0,0)} \dfrac{3\frac{y}{2}y}{\frac{y^2}{4}+y^2}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{12y^2}{10y^2}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{12}{10}=\dfrac{6}{5}$

d) $\lim\limits_{\left(x,x^2\right)\to(0,0)} \dfrac{3xx^2}{x^2+x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{1+x^2}=0$

e) El límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ no existe ya que a través de trayectorias diferentes se obtienen valores diferentes.

ii) $\lim\limits_{(x,ax)\to(0,0)} \dfrac{3xax}{x^2+a^2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3ax^2}{\left(1+a^2\right)x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3a}{1+a^2}=\dfrac{3}{1+a^2}$. Como el valor del límite depende de la pendiente *a* de la recta entonces el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ no existe.

2. Calcule, si existe, el siguiente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3\,x\,y}{5\,x^2+2\,y^2}$$

Solución:

Observe que el dominio de la función f definida por $f\,(x,y)=\dfrac{3\,x\,y}{5\,x^2+2\,y^2}$ es $\mathrm{R}^2-\{(0{,}0)\}$, no obstante el límite podría existir.

Por otra parte, si $(x,y)\to(0,0)$ entonces, $3xy\to 0$ y $5x^2+2y^2\to 0$, y se obtiene una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$.

Hay que estudiar el comportamiento de la función cuando $(x,y)\to(0,0)$ a través de diferentes trayectorias (o "caminos").

i) Por ejemplo, se puede estudiar el comportamiento de la función *f*, cuando $(x,y)\to(0,0)$, a través de la recta de ecuación $y=x$.

Como

$$f\,(x,x)=\frac{3\,x\,x}{5\,x^2+2\,x^2}=\frac{3\,x^2}{7\,x^2}=\frac{3}{7}$$

Se tiene que $f\,(x,y)\to\dfrac{3}{7}$ cuando $(x,y)\to(0,0)$ a través de la recta de ecuación $y=x$.

También se puede escribir:

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{3\,x\,x}{5\,x^2+2\,x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\,x^2}{7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{7}=\frac{3}{7}$$

ii) Ahora se puede estudiar el comportamiento de la función f cuando $(x,y)\to(0,0)$ a través de la recta de ecuación $y=2x$,

Como

$$f\,(x{,}2x)=\frac{3\,x\cdot 2\,x}{5\,x^2+2\cdot 4x^2}=\frac{6\,x^2}{13\,x^2}=\frac{6}{13}$$

Se tiene que $f\,(x,y)\to\dfrac{6}{13}$ cuando $(x,y)\to(0,0)$ a través de la recta de ecuación $y=2x$.

También se puede escribir:

$$\lim_{(x,2x)\to(0,0)} \frac{3\,x\cdot 2x}{5\,x^2+2\cdot 4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6\,x^2}{13x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{13}=\frac{6}{13}$$

Como por dos trayectorias diferentes la función tiende a valores diferentes cuando $(x,y)\to(0,0)$ se concluye que el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{5x^2+2y^2}$ no existe.

iii) El problema anterior también se puede resolver, estudiando el comportamiento de la función cuando (x,y) toma valores próximos a $(0,0)$ a través de cualquier la recta de ecuación $y=mx$, $m\in R$ que pase por el origen.

Como

$$f(x,mx)=\frac{3xmx}{5x^2+2\cdot m^2x^2}=\frac{3mx^2}{(5+2m^2)x^2}=\frac{3m}{5+2m^2}$$

Se tiene que la función tiende a valores diferentes según la pendiente *m* de la recta, por lo tanto, el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{5x^2+2y^2}$ no existe.

También se puede escribir:

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)}\frac{3xmx}{5x^2+2\cdot m^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3mx^2}{(5+2m^2)x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3m}{5+2m^2}=\frac{3m}{5+2m^2}$$

3. Compruebe que el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5xy^2}{x^2+y^4}$ no existe.

Solución:

Observe que el dominio de la función *g* definida por $g(x,y)=\dfrac{5xy^2}{x^2+y^4}$ es $\mathrm{R}^2-\{(0,0)\}$, no obstante el límite podría existir.

Por otra parte, si $(x,y)\to(0,0)$ entonces, $5xy^2\to0$ y $x^2+y^4\to0$, y se obtiene una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$.

Hay que estudiar el comportamiento de la función *g*, cuando $(x,y)\to(0,0)$, a través de diferentes trayectorias.

i) Por ejemplo, se puede estudiar el comportamiento de la función *g*, cuando $(x,y)\to(0,0)$, a través de la parábola de ecuación $x=y^2$.

Como

$$g(y^2,y)=\frac{5y^2\cdot y^2}{y^4+y^4}=\frac{5y^4}{2y^4}=\frac{5}{2}$$

Se tiene que, $g(x, y) \to \frac{5}{2}$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a través de $x = y^2$.
También se puede escribir

$$\lim_{(y^2, y) \to (0,0)} \frac{5y^2 \cdot y^2}{y^4 + y^4} = \lim_{y \to 0} \frac{5y^4}{2y^4} = \lim_{y \to 0} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

Ahora se puede estudiar el comportamiento de la función *g*, cuando $(x, y) \to (0, 0)$, a través de la recta de ecuación $y = 0$.

Como

$$f(x, 0) = \frac{5x \cdot 0}{x^2 + 0} = \frac{0}{x^2} = 0$$

Se tiene que, $f(x, y) \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a través del eje *x*.

También se puede escribir:

$$\lim_{(x,0) \to (0,0)} \frac{5x \cdot 0}{x^2 + 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

Como por dos trayectorias diferentes la función tiende a valores diferentes, el límite $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{5xy^2}{x^2 + y^4}$ no existe.

4. Utilice límites iterados para demostrar que el límite $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + 3y^2}$ no existe.

Solución:

Observe que el dominio de la función *f*, definida por $f(x, y) = \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + 3y^2}$ es $\mathrm{R}^2 - \{(0,0)\}$, no obstante el límite puede existir.

Observe que si $(x, y) \to (0,0)$ entonces $x^2 - 2y^2 \to 0$ y $x^2 + 3y^2 \to 0$, y se obtiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.
Se puede estudiar la existencia del límite, calculando los límites iterados.

$$\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + 3y^2}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0} 1 = 1 \qquad (1)$$

$$\lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + 3y^2}\right) = \lim_{y \to 0}\left(\frac{-2y^2}{3y^2}\right) = \lim_{y \to 0}\left(\frac{-2}{3}\right) = -\frac{2}{3} \qquad (2)$$

De (1) y (2), como los límites iterados existen y son distintos, se concluye que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-2y^2}{x^2+3y^2}$ no existe.

5. Demuestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(3x-y)=1$.

Solución:

Sea $\varepsilon>0$ dado, se debe hallar un numero $\delta>0$ tal que

$$\text{Si } 0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta \text{ entonces } |3x-y-1|<\varepsilon$$

Es decir,

Por propiedades del valor absoluto se tiene que

$$|a-b|\le|a|+|b|$$
$$|x-a|\le\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$
$$|y-b|\le\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

Luego,

$$|3x-y-1|=|3x-y-1+3-3|=|3(x-1)-(y-2)|\le|3(x-1)|+|y-2|=3|x-1|+|y-2|$$
$$\le 3\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<3\delta+\delta=4\delta$$

siempre que $0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta$.

Si se considera $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$ y $0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta$ se tiene que $|3x-y-1|<4\delta=4\dfrac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$.

Por lo tanto, para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}>0$ tal que

$$(x,y)\in\mathrm{R}^2 \text{ y } 0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta \text{ se tiene que } |3x-y-1|<\varepsilon$$

En consecuencia

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}(3x-y)=1$$

6. Calcule, si existe, el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$$

Solución:

Observe que el dominio de la función *h*, definida por $h(x,y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$ es $\mathrm{R}^2 - \{(0,0)\}$, sin embargo el límite puede existir.

Por otra parte, si $(x,y) \to (0,0)$ entonces, $x^4 - y^4 \to 0$ y $x^2 + y^2 \to 0$, y se obtiene una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$.

Si se estudia el comportamiento de la función *h* cuando $(x,y) \to (0,0)$ a través de diferentes trayectorias, como se hizo en los tres problemas anteriores, se obtiene que en todos los casos $h(x,y) \to 0$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ (verifíquelo). De ello **no se puede concluir que el límite exista**. **Para demostrar que el límite existe y es 0 se debe recurrir a la definición**. Es decir,

Sea $\varepsilon > 0$ dado, se debe hallar un numero $\delta > 0$ tal que

$$\text{Si } 0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta \text{ entonces } \left| \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

Es decir,

$$\text{Si } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ entonces } \left| \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon$$

Como para $(x,y) \neq (0,0)$

$$\left| \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right| = \left| x^2 - y^2 \right| \leq \left| x^2 \right| + \left| y^2 \right| = x^2 + y^2 < \delta^2$$

Si se define $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ y $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ se tiene que $\left| \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon$.

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$ tal que

$$(x,y) \in \mathrm{R}^2 - \{(0,0)\} \text{ y } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ se tiene que } \left| \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon$$

En consecuencia

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = 0$$

7. Verifique que el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy - 2x - y + 2}{x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5}$ no existe.

Solución:

Si $(x, y) \to (1,2)$ entonces, $xy - 2x - y + 2 \to 0$ y $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 \to 0$, y se obtiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

Al factorizar el numerador y el denominador para "intuir" la familia de caminos, resulta

$$xy - 2x - y + 2 = x(y-2) - y - 2 = (y-2)(x-1)$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

Por lo tanto:

$$\frac{x\,y - 2x - y + 2}{x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5} = \frac{(y-2)(x-1)}{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

Si se considera la familia de rectas de ecuación: $x - 1 = m(y-2)$ que pasan por el punto $(1,2)$, se obtiene:

$$\lim_{(1+m(y-2),\, y)\to(1,2)} \frac{x\,y - 2x - y + 2}{x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5} = \lim_{(1+m(y-2),\, y)\to(1,2)} \frac{(y-2)(x-1)}{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \lim_{y\to 2} \frac{m(y-2)^2}{(m^2+1)(y-2)^2} =$$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Como este límite varía según la pendiente *m* de la recta, se tiene que $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x\,y - 2x - y + 2}{x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5}$ no existe.

8. El límite $\lim_{(x,y)\to(-2,\,0)} \frac{x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x^2y^2}{4 + y^2 + x^2 + 4x}$ existe. Halle su valor.

Solución:

Observe que si $(x, y) \to (0,0)$ entonces $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x^2y^2 \to 0$ y $4 + y^2 + x^2 + 4x \to 0$ y se obtiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{(x,y)\to(-2,\,0)} \frac{x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x^2y^2}{4 + y^2 + x^2 + 4x} = \lim_{(x,y)\to(-2,\,0)} \frac{x^2\left(x^2 + 4x + 4 + y^2\right)}{y^2 + (x+2)^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(-2,\,0)} \frac{x^2\left((x+2)^2 + y^2\right)}{y^2 + (x+2)^2} = \lim_{(x,y)\to(-2,\,0)} x^2 = 4$$

9. Se afirma que el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(2x^2 + 2y^2 + 1\right)}{2x^2 + 2y^2}$ <u>existe</u>. Halle su valor.

Solución:

Observe que si $(x,y)\to(0,0)$ entonces $\ln\left(2x^2+2y^2+1\right)\to 0$ y $2x^2+2y^2\to 0$ y se obtiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

<u>Como el límite existe</u> para $(x,y)\to(0,0)$, se puede determinar a través de cualquier trayectoria.

Sea la recta de ecuación $x=y$ la trayectoria seleccionada.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln\left(2x^2+2y^2+1\right)}{2x^2+2y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(4x^2+1\right)}{4x^2}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{8x}{4x^2+1}}{8x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4x^2+1}=1$$

10. El límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos\left(x^2+y^2+\frac{3\pi}{2}\right)}{x^2+y^2}$ <u>existe</u>. Halle su valor.

Solución:

Observe que si $(x,y)\to(0,0)$ entonces $cos\left(x^2+y^2+\frac{3\pi}{2}\right)\to 0$ y $x^2+y^2\to 0$ y se obtiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

<u>Como el límite existe</u> para $(x,y)\to(0,0)$, se puede determinar a través de cualquier trayectoria.

Sea la recta de ecuación $x=y$ la trayectoria seleccionada.

Luego,

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)}\frac{cos\left(x^2+x^2+\frac{3\pi}{2}\right)}{x^2+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{cos\left(2x^2+\frac{3\pi}{2}\right)}{2x^2}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-4x\,\mathrm{sen}\left(2x^2+\frac{3\pi}{2}\right)}{4x}$$
$$=\lim_{x\to 0}-\mathrm{sen}\left(2x^2+\frac{3\pi}{2}\right)=1$$

11. <u>Suponiendo que el límite existe</u>, utilice el siguiente cambio:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \text{ con } r\geq 0 \text{ y } \theta\in\left[0,2\pi\right]$$

Denominadas coordenadas polares, para calcular el límite

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)$$

Solución:

Observe que

$$x^2+y^2=r^2\cos^2\theta+r^2\operatorname{sen}^2\theta=r^2$$

Además,

$$(x,y)\to(0,0)\Leftrightarrow r\to 0$$

Luego,

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)=\lim_{r\to 0} r^2\ln r^2=\lim_{r\to 0}\frac{\ln r^2}{\frac{1}{r^2}}\overset{L'H}{=}\lim_{r\to 0}\frac{\frac{2r}{r^2}}{-\frac{2}{r^3}}=\lim_{r\to 0}\left(-r^2\right)=0$$

12. **a**) Demuestre que $f(x,y,z)=\dfrac{2xyz}{x^4+y^2+z^4}\to 0$ cuando $(x,y,z)\to(0,0,0)$ a lo largo de la recta de ecuación $\begin{cases} x=t \\ y=t, \quad t\in R. \\ z=t \end{cases}$

b) Demuestre que $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{2xyz}{x^4+y^2+z^4}$ no existe.

Solución:

a) Observe que

$$(x,y,z)\to(0,0,0) \ \Leftrightarrow t\to 0$$

Como

$$f(t,t,t)=\frac{2t^3}{t^4+t^2+t^4}=\frac{2t^3}{t^2\left(1+2t^2\right)}=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 0}\frac{2t}{1+t^2}=0$$

Se tiene que $f(x,y,z)=\dfrac{2xyz}{x^4+y^2+z^4}\to 0$ cuando $(x,y,z)\to(0,0,0)$ a lo largo de la recta dada.

b) Ahora se puede estudiar el comportamiento de la función cuando $(x,y,z)\to(0,0,0)$ a través de la curva de ecuación $\begin{cases} x=t \\ y=t^2, \quad t\in R. \\ z=t \end{cases}$

Observe que

$$(x, y, z) \to (0,0,0) \;\; \Leftrightarrow t \to 0$$

Como

$$f\left(t, t^2, t\right) = \frac{2t^4}{t^4 + t^4 + t^4} = \frac{2t^4}{3t^4} = \frac{2}{3}$$

Se tiene que $f(x, y, z) \to \frac{2}{3}$ cuando $(x, y, z) \to (0,0,0)$ a través de la curva de ecuación $\begin{cases} x = t \\ y = t^2, \quad t \in R. \\ z = t \end{cases}$

Como por dos trayectorias diferentes la función f tiende a valores diferentes, el límite $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2xyz}{x^4 + y^2 + z^4}$ no existe.

Observe la siguiente propiedad

Si $\lim\limits_{(x,x)\to(a,b)} f(x, y) = c$ y si existen $\lim\limits_{x\to a} f(x, y)$ y $\lim\limits_{y\to b} f(x, y)$ entonces existen los límites iterados y

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x, y)\right) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x, y)\right) = c$$

El recíproco no es cierto. Esto se puede comprobar con el siguiente ejercicio.

13. Considere la función f definida por $f(x, y) = \frac{3xy^3}{2y^6 + x^2}$.

i) Estudie los límites iterados para $(x, y) \to (0,0)$. ¿Qué concluye?

ii) Estudie $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^3}{2y^6 + x^2}$ a través de una trayectoria conveniente. ¿Qué concluye?

Solución:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \frac{3xy^3}{2y^6 + x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ y $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{3xy^3}{2y^6 + x^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0}{2y^6} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$

Se concluye que los límites iterados existen y son iguales.

ii) Se puede estudiar el comportamiento de la función *f*, cuando $(x, y) \to (0,0)$, a través de la curva de ecuación $x = y^3$.

$$\lim_{(y^3, y)\to(0,0)} \frac{3y^3y^3}{2y^6 + \left(y^3\right)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{3y^6}{3y^6} = \lim_{y\to 0} 1 = 1$$

Como el valor obtenido de la función *f* cuando $(x, y) \to (0,0)$ a través de la trayectoria seleccionada es diferente al valor obtenido en los límites iterados se concluye que el límite $f(x, y) = \dfrac{3xy^3}{2y^6 + x^2}$ no existe.

14. Estudie la continuidad de la función real de dos variables definida por

$$f(x, y) = \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Solución:

Esta función es continua en todo punto de R^2, ya que es el cociente de dos funciones continuas cuyo denominador no se anula

15. Estudie la continuidad de la función real *f* de dos variables definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si} & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución:

i) Para $(x, y) \neq (0,0)$ la función *f* es continua ya que es el cociente de dos funciones continuas cuyo denominador no se anula.

ii) Estudiemos la continuidad de *f* en $(0,0)$.

a) $f(0,0) = 0$

b) Estudiemos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Observe que si $(x, y) \to (0,0)$ entonces $x \to 0$ y $\sqrt{x^2 + y^2} \to 0$ y se obtiene una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$.

Hay que estudiar el comportamiento de la función cuando $(x, y) \to (0,0)$ a través de diferentes trayectorias.

Por ejemplo, se puede estudiar el comportamiento de la función cuando $(x,y)\to(0,0)$ por la familia de semirrectas $y = mx, (x \geq 0)$.

Como

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|\sqrt{1+m^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\sqrt{1+m^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$$

Se tiene que, el límite depende de la trayectoria (varía según la pendiente), y en consecuencia el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe, por lo tanto, f no es continua en $(0,0)$.

De i) y ii) la función f es continua en $R^2 - \{(0,0)\}$.

16. Dibuje la región más grande del plano en que la función f definida por $f(x,y) = \cos\left(\dfrac{xy}{x^2-y^2-1}\right)$ es continua.

Solución:

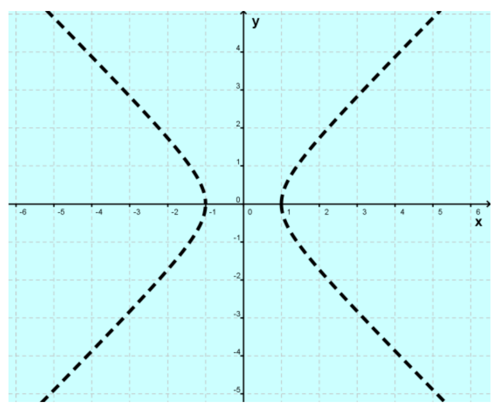
La función f es la compuesta de la función coseno de una variable con una función racional de dos variables. Como la función coseno es continua en *R* y la función racional es continua en aquellos puntos que no anulen el denominador, se tiene que f es continua en su dominio que el conjunto

$$R^2 - \{(x,y)\in R^2 \,/\, x^2-y^2-1=0\}$$

Como

$$x^2-y^2-1=0 \Leftrightarrow x^2-y^2=1$$

Por lo tanto, la función f es continua en todos los puntos del plano, excepto en los puntos pertenecientes a la hipérbola de ecuación $x^2-y^2=1$ mostrada en la figura.



17. Determine la región más grande del plano en que la función f definida por $f(x,y,z) = \ln(4-x^2-y^2-z^2)$ es continua.

Solución:

La función *f* es la compuesta de la función logaritmo neperiano de una variable con una función polinómica de tres variables. Como la función logaritmo es continua en $(0,+\infty)$, se tiene que f es continua en su dominio que es el conjunto

$$\mathrm{Dom}_f = \{(x,y,z) \in R^3 \,/\, 4 - x^2 - y^2 - z^2 > 0\}$$

Ya que

$$4 - x^2 - y^2 - z^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 < 4$$

Se tiene que la función f es continua en todos los puntos del espacio R^3 que están en el interior de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

18. Sea g la función real de dos variables definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)(y+3)^3}{(x-2)^2 + (y+3)^6} & \text{si} \quad (x,y) \neq (2,-3) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (2,-3) \end{cases}$$

¿Es la función *g* continua en $(2,-3)$?

Solución:

Si se considera la familia de curvas de ecuación: $x - 2 = m(y+3)^3$ que pasan por el punto $(2,-3)$, se obtiene:

$$\lim_{(2+m(y+3)^3,y) \to (2,-3)} \frac{m(y+3)^3(y+3)^3}{m^2(y+3)^6 + (y+3)^6} = \lim_{y \to -3} \frac{m(y+3)^6}{(m^2+1)(y+3)^6} = \lim_{y \to -3} \frac{m}{m^2+1} = \frac{m}{m^2+1}$$

Como este límite varía según *m*, se tiene que $\lim\limits_{(x,y) \to (2,-3)} g(x,y)$ no existe y por lo tanto la función *g* no es continua en $(2,-3)$.

19. Dada la función *h* definida por $h(x,y) = \dfrac{3x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$. ¿Es posible definir $h(0,0)$ de modo que sea continua en $(0,0)$?

Solución:

Para responder la pregunta es necesario estudiar la existencia del límite de la función dada para $(x,y) \to (0,0)$.

Para ello se puede considerar la trayectoria correspondiente a la familia de rectas de ecuaciones $y = mx$.

Luego,

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(3-m^2\right)x^2}{\left(1+m^2\right)x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3-m^2}{1+m^2} = \frac{3-m^2}{1+m^2}$$

En consecuencia el límite $\lim\limits_{(x,mx)\to(0,0)} \dfrac{3x^2-y^2}{x^2+y^2}$ no existe porque depende del valor de *m*. Por lo tanto, no se puede definir la función *h* para que sea continua en $(0,0)$.

20. Sea $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0{,}0)$.

a) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x{,}0)$ y $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)$.

b) Calcule los límites iterados en (0,0).

c) Calcule el límite de f en (0,0) a lo largo de las parábolas de ecuaciones $y^2=ax$ y $y=bx^2$.

d) ¿Puede concluir de (a), (b) y (c) que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe y vale 0?

e) Demuestre, aplicando la definición, que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

f) ¿Se puede definir $f(0{,}0)$ de modo que f sea continua en (0,0)?

g) Si la respuesta anterior es afirmativa ¿en cuál conjunto la función dada es continua?

Solución:

a) $\lim\limits_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ y $\lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^4}{y^2} = \lim\limits_{y\to 0} y^2 = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ y $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^4}{y^2} = \lim\limits_{x\to 0} y^2 = 0$

c) $$\lim_{(x,bx^2)\to(0,0)} \frac{x^4+b^4x^8}{x^2+b^2x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(x^2+b^4x^6\right)}{x^2\left(1+b^2x^2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+b^4x^6}{1+b^2x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{\left(\frac{y^2}{a},y\right)\to(0,0)} \frac{\dfrac{y^8}{a^4}+y^4}{\dfrac{y^4}{a^2}+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2\left(\dfrac{y^6}{a^4}+y^2\right)}{y^2\left(\dfrac{y^2}{a^2}+1\right)} = \lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{y^6}{a^4}+y^2}{\dfrac{y^2}{a^2}+1} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

d) No se puede concluir.

e) Sea $\varepsilon > 0$ dado, se debe hallar un numero $\delta > 0$ tal que

$$\text{Si } \ 0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta \ \text{ entonces } \left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

Es decir,

$$\text{Si } \ 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \ \text{ entonces } \left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon$$

Como

$$\left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} \right| = x^2 + y^2 < \delta^2$$

Siempre que $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$

Si se define $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ y $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ se tiene que $\left| \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon$.

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$ tal que

$$(x, y) \in \mathrm{R}^2 - \{(0,0)\} \ \text{ y } \ 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \ \text{ se tiene que } \left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon$$

En consecuencia

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = 0$$

f) Si se puede definir, basta con hacer $f(0,0) = 0$.

g) Es continua en R^2.

21. Si $f(x, y) = 3x^2y - 2xy$, halle:

a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$ **b**) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2 y - 2(x+h)y - 3x^2y + 2xy}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6xhy + 3h^2 y - 2hy}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (6xy + 3hy - 2y)$$
$$= 6xy - 2y$$

b) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2(y+h) - 2x(y+h) - 3x^2 y + 2xy}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 h - 2xh}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (3x^2 - 2x)$$
$$= 3x^2 - 2x$$

Problemas propuestos

En los problemas del 1 al 14 calcule el límite propuesto o demuestre que no existe.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (x^2 + 2xy - 5)$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy^3}{2y^6 + x^2}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2 + xy}{3x^2 + 4y^2}$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \ln\left(\dfrac{1+(x+y)^8}{x^8 + y^8 + 1}\right)$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^4 + 2y^2}$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,0)} \dfrac{3(x+1)^2 - 2y(x+1)}{x^2 + y^2 + 2x + 1}$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + xy}{8x^2 + y^2}$

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{(x-1)^2 + (y-1)^2 + 2}{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3}$

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{2}\,xy^2}{x^2 + 3y^4}$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{yx^2 - 4y}{x^4 - 8x^2 + y^2 + 16}$

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{2x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2}\right)^4$

12. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{x^2}{1+2x^2+y^2}}$

13. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 5}{8x^2 + y^2 + \sqrt{7}}$

14. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2 + 2y^2 + 4z^2}{8x^2 + y^2}$

Respuestas: **1**) 11 **2**) no existe **3**) no existe **4**) 0 **5**) no existe **6**) no existe **7**) no existe **8**) 2 **9**) no existe **10**) no existe **11**) no existe **12**) 1 **13**) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$ **14**) no existe

En los problemas del 15 al 19 los límites propuestos existen, determine su valor.

15. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}$

16. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}$

17. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$

18. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{3x^2 + 3y^2}$

19. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy - 1}{1 + xy}$

Respuestas: **15**) 0 **16**) 1 **17**) 4 **18**) $\dfrac{1}{3}$ **19**) 0

En los problemas del 20 al 25 estudie la continuidad de las funciones definidas.

20. $f(x,y) = \text{sen}\,(x^3 - x^2 y)$

21. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy}{5x^2 + 2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{3}{7} & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

22. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

23. $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

24. $f(x,y,z) = \arctan\,(x^2 - 2x^2 y + 3zy)$

25. $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2y^2 + z^2}{4x^2 + 5y^2 + 2z^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0.0,0) \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

Respuestas: **20**) continua en R^2 **21**) continua en $R^2 - \{(0,0)\}$ **22**) continua en $R^2 - \{(0,0)\}$ **23**) continua en R^2 **24**) continua en R^3 **25**) continua en $R^3 - \{(0,0,0)\}$

En los problemas del 26 al 29 halle los límites.

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$ **b**) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$

26. $f(x,y) = 3x^3 - 2y^2$

27. $f(x,y) = 2x^2 y^2 + xy$

28. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

29. $f(x,y) = 4 - 2x^2 - 8y^2 x$

Respuestas: **26**) **a**) $9x^2$ **b**) $-4y$ **27**) **a**) $4xy^2 + y$ **b**) $4x^2 y + x$ **28**) **a**) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **b**) $\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **29**) **a**) $-4x - 8y^2$ **b**) $-16xy$

En los problemas del 30 al 33 dibuje la región del plano más grande en las cuales la función f es continua.

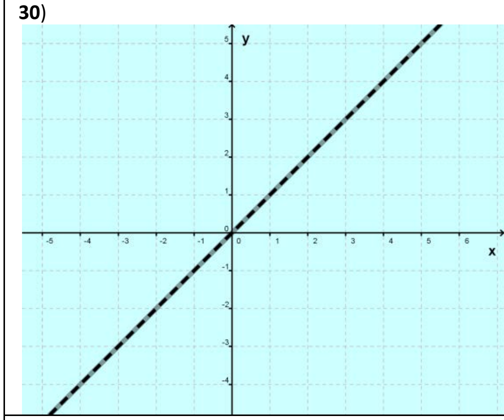
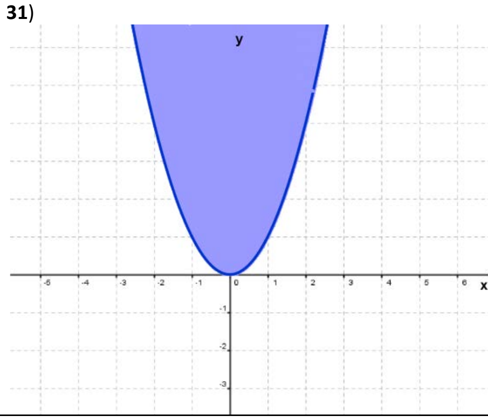
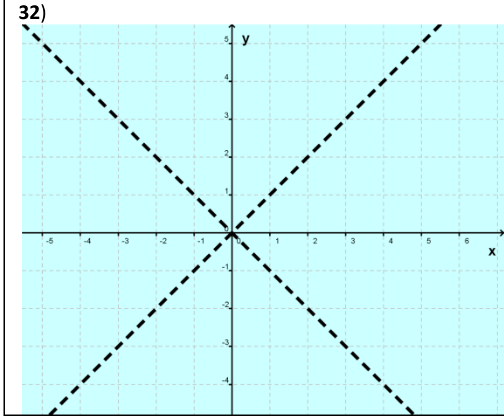
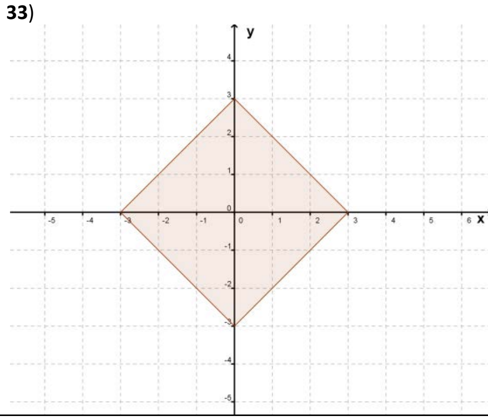
30. $f(x,y) = e^{\frac{1}{x-y}}$

31. $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$

32. $f(x,y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{xy}{|x| - |y|}\right)$

33. $f(x,y) = \sqrt{3 - |x| - |y|}$

Respuestas:

30) 	**31)** 
32) 	**33)** 

En los problemas del 34 al 40 decida si la afirmación dada es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

34. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{4x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2}{5x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5}$

35. Sea $f(x,y)=\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$. Si se sabe que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ se tiene que la función f es continua en $(0,0)$.

36. La función f definida por $f(x,y)=\dfrac{e^{xy}-\cos 2xy}{3+x^2+y^2}$ es continua en R^2.

37. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2-(mx)^2}{x^2+3(mx)^2} = \dfrac{x^2\left(2-m^2\right)}{x^2\left(1+3m^2\right)} = \dfrac{2-m^2}{1+3m^2}$

38. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2-y^2}{x^2+7y^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2x^2-y^2}{x^2+7y^2}\right]$

39. Si $f(x,y) \to L_1$ cuando $(x,y) \to (a,b)$ a lo largo de una trayectoria C y $f(x,y) \to L_2$ cuando $(x,y) \to (a,b)$ a lo largo de una trayectoria W, donde $L_1 \neq L_2$, entonces no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

40. La función f es continua en $D \subset R^3$ si es continua en todos los puntos $(a,b,c) \in D$.

Respuestas: **34**) **a**) Falso **35**) Falso **36**) Verdadero **37**) Falso **38**) Falso **39**) Verdadero **40**) Verdadero

DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Definiciones, propiedades y teoremas importantes

Definición 3.1: Sea *f* una función real de dos variables reales definida por $z = f(x, y)$, sus derivadas parciales son las funciones f_x y f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Definición 3.2: Sea *f* una función real de dos variables reales definida por $z = f(x, y)$, sus derivadas parciales f_x y f_y son también funciones de dos variables cuyas derivadas parciales se llaman derivadas parciales de segundo orden y se definen:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)$$

Teorema 3.1: (Teorema de Clairaut) Sea *f* una función real de dos variables reales definida sobre un disco *D* que contiene al punto (a, b). Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son continuas en *D* entonces $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

Definición 3.3: Sea *f* una función real de dos variables reales definida por $z = f(x, y)$. Se dice que *f* es diferenciable en (a, b) si $\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$ se puede expresar de la forma

$$\Delta z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

Donde $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

Teorema 3.2: Si las derivadas parciales f_x y f_y existen y son continuas en algún conjunto abierto que contenga a (a,b), entonces f es diferenciable en (a,b).

Teorema 3.3: Si f es una función real de dos variables reales y es diferenciable en (a,b), entonces f es continua en (a,b).

Teorema 3.4: Sean f y g dos funciones diferenciables en (a,b) y sea k una constante. Entonces las funciones kf , $f \pm g$, fg y f/g si $g(a,b) \neq 0$, son diferenciables en (a,b).

Teorema 3.5: Sea f es una función real de dos variables reales diferenciable en (a,b), y sea g una función real de una variable real derivable en $f(a,b)$, entonces la compuesta $g \circ f$ es diferenciable en (a,b).

Teorema 3.6: Sea $z = f(x,y)$, tiene derivadas parciales continuas f_x y f_y y si $x = g(t)$ y $y = h(t)$, donde g y h son funciones derivables de t, entonces z es una función derivable de t.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Teorema 3.7: Sea f una función real de dos variables reales definida por $z = f(x,y)$, si f tiene derivadas parciales continuas f_x y f_y y si $x = g(s,t)$ y $y = h(s,t)$, donde g y h son funciones con derivadas parciales continuas de s y t, entonces z tiene derivadas de s y t, y

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Teorema 3.8: Si la ecuación $F(x,y,z) = 0$ define a z como función diferenciable de x y y, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,yz)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,yz)}$$

Definición 3.4: Sea f una función real de dos variables reales definida en un conjunto abierto D que contiene a (a,b). Sea $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$ un vector unitario de R^2. Se define la derivada direccional de f en (a,b) en la dirección de $\vec{v}$, y se escribe $D_{\vec{v}} f(a,b)$ o $\frac{\partial f(a,b)}{\partial \vec{v}}$ como

$$D_{\vec{v}} f(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv_1, b+tv_2) - f(a,b)}{t}$$

Siempre que el límite exista.

Teorema 3.9: Si *f* es una función diferenciable de *x* y *y*, entonces *f* admite la derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$ y se cumple que:

$$D_{\vec{v}} f(x,y) = f_x(x,y) v_1 + f_y(x,y) v_2$$

Definición 3.5: Si $z = f(x,y)$, donde *f* es una función diferenciable de *x* y *y*, entonces el gradiente de *f* es la función vectorial ∇f definida por:

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j}$$

Teorema 3.10: Si *f* es una función diferenciable de *x* y *y*, entonces *f* admite derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$ y se verifica que:

$$D_{\vec{v}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{v}$$

Teorema 3.11: Sea *f* una función real de dos variables reales definida por $z = f(x,y)$. El valor máximo de la derivada direccional $D_{\vec{v}} f(x,y)$ es $\left\| \nabla f(x,y) \right\|$ y se presenta cuando el vector $\vec{v}$ tiene la misma dirección del gradiente $\nabla f(x,y)$.

Nota: Las definiciones y teoremas anteriores pueden extenderse a funciones de tres variables.

Definición 3.6: Sea *F* diferenciable en el punto $P(a,b,c)$ de la superficie *S* definida por $F(x,y,z) = 0$ tal que $\nabla F(a,b,c) \neq \vec{0}$. El plano que pasa por $P(a,b,c)$ y tiene como vector normal $\nabla F(a,b,c)$ se llama plano tangente a *S* en *P* y la recta que pasa por $P(a,b,c)$ y tiene la dirección del $\nabla F(a,b,c)$ se llama recta normal a *S* en *P*.

Teorema 3.12: Si *F* es diferenciable en $P(a,b,c)$, entonces la ecuación del plano tangente a la superficie *S* definida por $F(x,y,z) = 0$ en $P(a,b,c)$ es:

$$F_x(a,b,c)(x-a) + F_y(a,b,c)(y-b) + F_z(a,b,c)(z-c) = 0$$

Definición 3.7: Una función *f* real de dos variables reales definida por $z = f(x,y)$, tiene un máximo local en (a,b) sí y solo si $f(x,y) \leq f(a,b)$ para todos los puntos (x,y) en algún disco con centro (a,b). El número real $f(a,b)$ se llama máximo local.

Definición 3.8: Una función *f* real de dos variables reales definida por $z = f(x,y)$, tiene un mínimo local en (a,b) sí y solo si $f(x,y) \geq f(a,b)$ para todos los puntos (x,y) en algún disco con centro (a,b). El número real $f(a,b)$ se llama mínimo local.

Definición 3.9: Una función f real de dos variables reales definida por $z = f(x, y)$, tiene un máximo absoluto en (a,b) sí y solo si $f(x, y) \leq f(a,b)$ para todos los puntos (x, y) en el dominio de *f*. El número real $f(a,b)$ se llama máximo absoluto.

Definición 3.10: Una función f real de dos variables reales definida por $z = f(x, y)$, tiene un mínimo absoluto en (a,b) sí y solo si $f(x, y) \geq f(a,b)$ para todos los puntos (x, y) en el dominio de *f*. El número real $f(a,b)$ se llama mínimo absoluto.

Definición 3.11: Los valores máximos y mínimos locales se denominan valores extremos locales.

Definición 3.12: el máximo absoluto y el mínimo absoluto se denominan valores extremos absolutos.

Teorema 3.12: Sea f real una función real de dos variables reales, si f tiene un extremo local en (a,b) y las derivadas parciales de primer orden existen en ese punto entonces $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.

Definición 3.13: Punto crítico de una función f real de dos variables reales, es un punto del dominio de *f* donde se anulan las funciones f_x y f_y, o donde alguna de ellas no exista.

Teorema 3.13: Sea f una función real de dos variables reales definida por $z = f(x, y)$, y tal que las segundas derivadas parciales de *f* existen y son continuas en algún disco con centro (a,b), y además $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$. Sea

$$D = D(a,b) = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - \left[f_{xy}(a,b)\right]^2$$

Entonces,

a) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0$ entonces $f(a,b)$ es un mínimo local.

b) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0$ entonces $f(a,b)$ es un máximo local.

c) Si $D < 0$, entonces $f(a,b)$ no es un extremo local, y al punto (a,b) se le llama punto de silla de *f*, y la gráfica de *f* atraviesa a su plano tangente en (a,b).

Teorema 3.14: Sea *f* una función real de dos variables reales continua en un conjunto cerrado y acotado de R^2, entonces *f* tiene un máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ y un mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ en algunos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) del dominio.

Método de multiplicadores de Lagrange: Supongamos que los valores extremos absolutos de $f(x, y, z)$ existen y que $\nabla g \neq \vec{0}$ se encuentra en la superficie definida por $g(x, y, z) = k$.

Para determinar dichos valores extremos absolutos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$

i) Se determinan los valores de *x, y y* λ. Tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \quad \text{y} \quad g(x, y, z) = k$$

ii) Se evalúa *f* en todos los puntos obtenidos en i). El mayor de esos valores es el máximo de *f*, el menor pequeño de los valores es el mínimo de *f*.

Problemas resueltos

1. Sea $z=\sqrt{x^4+y^4}$. Demuestre que $x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=2z$

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+y^4}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y^3}{\sqrt{x^4+y^4}}$$

Luego,

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{2x^4+2y^4}{\sqrt{x^4+y^4}}=2\sqrt{x^4+y^4}=2z$$

2. Sea $f(x,y)=\left(x^2+1\right)^x-3\left(y^2+x\right)^y$ con $y^2+x>0$. Determine:

a) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ **b**) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

Solución:

a) Para calcular $\frac{\partial\left(x^2+1\right)^x}{\partial x}$ es conveniente hacer un cambio se variable:

Sea $w=\left(x^2+1\right)^x$.

$$w=\left(x^2+1\right)^x \Rightarrow \ln w=x\ln\left(x^2+1\right)$$

Derivando con respecto a *x*, resulta:

$$\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}=\ln\left(x^2+1\right)+\frac{x\cdot 2x}{x^2+1}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\left(x^2+1\right)^x\left(\ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x^2}{x^2+1}\right)$$

El cálculo de $\frac{\partial\left(y^2+x\right)^y}{\partial x}$ es directo:

$$\frac{\partial\left(y^2+x\right)^y}{\partial x}=y\left(y^2+x\right)^{y-1}$$

Luego:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\left(x^2+1\right)^x\left(\ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x^2}{x^2+1}\right)-3y\left(y^2+x\right)^{y-1}$$

b) Procediendo de manera análoga a la parte a)

Sea $w=\left(y^2+x\right)^y$, entonces

$$w=\left(y^2+x\right)^y\Rightarrow \ln w=y\ln\left(y^2+x\right)$$

Al derivar *w* con respecto a *x*, resulta:

$$\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial y}=\ln\left(y^2+x\right)+\frac{y\cdot 2y}{y^2+x}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\left(y^2+x\right)^y\left(\ln\left(y^2+x\right)+\frac{2y^2}{y^2+x}\right)$$

Observe que $\frac{\partial\left(x^2+1\right)^x}{\partial y}=0$

Luego:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\left(y^2+x\right)^y\left(\ln\left(y^2+x\right)+\frac{2y^2}{y^2+x}\right)$$

3. Sea $f(x,y)=\int_{x+y}^{x^2}g(t)\,dt$, donde g es una función real de variable real continua. Determine:

a) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ **b**) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

Solución:

a) Aplicando el teorema fundamental de cálculo, se tiene que:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int_{x+y}^{x^2}g(t)\,dt=g\left(x^2\right)\frac{\partial\left(x^2\right)}{\partial x}-g(x+y)\frac{\partial(x+y)}{\partial x}=2x\,g\left(x^2\right)-g(x+y)$$

b) Aplicando nuevamente el teorema fundamental de cálculo, resulta,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x+y}^{x^2}g(t)\,dt=g\left(x^2\right)\frac{\partial\left(x^2\right)}{\partial y}-g(x+y)\frac{\partial(x+y)}{\partial y}=-g(x+y)$$

4. Sea $w(p,q)=p^{\mathrm{n}}e^{pq^2}$, halle el valor de la constante "n" con $n\in N$ de manera que w satisfaga la ecuación

$$\frac{\partial w}{\partial p}-\frac{1}{2}\frac{q}{p}\frac{\partial w}{\partial q}=3p^2e^{pq^2}$$

Solución:

$$\frac{\partial w}{\partial p}=\mathrm{n}\,p^{\mathrm{n}-1}e^{pq^2}+p^{\mathrm{n}}q^2e^{pq^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial q}=2pqp^{\mathrm{n}}e^{pq^2} \quad (2)$$

De (1) y (2) resulta

$$\frac{\partial w}{\partial p}-\frac{1}{2}\frac{q}{p}\frac{\partial w}{\partial q}=\mathrm{n}\,p^{\mathrm{n}-1}e^{pq^2}+p^{\mathrm{n}}q^2e^{pq^2}-p^{\mathrm{n}}q^2e^{pq^2}=np^{n-1}e^{pq^2}$$

Luego,

$$\frac{\partial w}{\partial p}-\frac{1}{2}\frac{q}{p}\frac{\partial w}{\partial q}=3p^2e^{pq^2}$$

De donde

$$\mathrm{n}\,p^{\mathrm{n}-1}e^{pq^2}=3p^2e^{pq^2}\Rightarrow \mathrm{n}\,p^{\mathrm{n}-3}=3\Rightarrow n=3$$

5. Halle los valores de las constantes *a*, *b* y *c* tales que la función real de dos variables definida por $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ satisfaga la ecuación de Laplace:

$$f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)=0$$

Solución:

$$f_x(x,y)=2ax+by\Rightarrow f_{xx}(x,y)=2a \quad \text{y} \quad f_y(x,y)=bx+2cy\Rightarrow f_{yy}(x,y)=2c$$

Por lo tanto

$$f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)=0\Leftrightarrow 2a+2c=0\Leftrightarrow a=-c$$

Observe que *b* puede tomar cualquier valor.

6. Sea f una función real de dos variables de clase C^2, definida por $z=f(x,y)=e^{x^2y}$ pruebe que para $x\neq 0$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2x^2\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{4y^2}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=2(y-2x)z$$

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy\, e^{x^2 y} \Rightarrow 2x^2 \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 y\, e^{x^2 y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y\left(e^{x^2 y} + 2x^2 y e^{x^2 y}\right) = 2ye^{x^2 y} + 4x^2 y^2 e^{x^2 y} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\, e^{x^2 y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^4\, e^{x^2 y} \Rightarrow -\frac{4y^2}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x^2 y^2\, e^{x^2 y} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = 2x\left(e^{x^2 y} + x^2 y e^{x^2 y}\right) = 2xe^{x^2 y} + 2x^3 y e^{x^2 y} \Rightarrow -2\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = -4\,xe^{x^2 y} - 4x^3 y e^{x^2 y} \qquad (4)$$

De 1), 2), 3) y 4)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2x^2\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{4y^2}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = 2ye^{x^2 y} - 4\,xe^{x^2 y} = 2e^{x^2 y}(y - 2x)$$

7. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y + 2xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Halle **a**) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ **b**) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

Solución:

a) **i**) Sea $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x^2 + y^2)(2xy + 2y^2) - 2x(x^2 y + 2xy^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^3 - 2x^2 y^2 + 2y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

ii) Sea $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h+0,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^2\cdot 0 + 2h\cdot 0^2}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

De i) y ii) resulta

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3 - 2x^2 y^2 + 2y^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b) **i**) Sea $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+4xy\right)-2y\left(x^2y+2xy^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^4+4x^3y-x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h+0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{0\cdot h+2\cdot 0\cdot h^2}{0^2+h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

De i) y ii) resulta

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+4x^3y-x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \text{si}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

8. Sea *g* la función definida por $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy\left(x^2-y^2\right)}{5\left(x^2+y^2\right)} & \text{si}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0\quad \text{si}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

a) Halle $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ para $(x,y)\neq(0,0)$.

b) Halle $\dfrac{\partial g(0,0)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial g(0,0)}{\partial y}$.

c) Halle $\dfrac{\partial^2 g(0,0)}{\partial x\partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 g(0,0)}{\partial y\partial x}$.

Solución:

a) Sea $(x,y)\neq(0,0)$ entonces

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=\frac{2}{5}\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(3x^2y-y^3\right)-\left(x^3y-xy^3\right)2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2}{5}\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2}{5}\frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=\frac{2}{5}\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^3-3xy^2\right)-\left(x^3y-xy^3\right)2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2}{5}\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2}{5}\frac{x\left(x^4-4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

b) Las derivadas parciales $\dfrac{\partial g(0,0)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial g(0,0)}{\partial y}$ se deben calcular por definición:

$$\frac{\partial g(0,0)}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h,0)-g(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h,0)-g(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(h^3\cdot 0-h\cdot 0^3)}{5(h^2+0^2)}-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

$$\frac{\partial g(0,0)}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{g(0,0+h)-g(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(0,h)-g(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(0^3\cdot h-0\cdot h^3)}{5(0^2+h^2)}-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

c) De a) y b) se tiene que

$$g_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{5(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

y

$$g_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{5(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Luego,

$$\frac{\partial^2 g(0,0)}{\partial x\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{g_y(0+h,0)-g_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h(h^4-4h^2\cdot 0^2-0^4)}{5(h^2+0^2)^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h^5}{5h^4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h^5}{5h^5}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{\partial^2 g(0,0)}{\partial y\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{g_x(0,0+h)-g_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h(0^4+4\cdot 0^2\cdot h^2-h^4)}{5(0^2+h^2)^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{2h^5}{5h^4}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-2h^5}{5h^5}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{2}{5}$$

9. Sea f la función definida por $f(x,y)=3x-2y^2$.

a) Halle por definición la derivada de f en (x,y) en la dirección del vector $\vec{v}=4\vec{i}+3\vec{j}$.

b) Halle la derivada direccional de f en el punto $(4,-1)$ en la dirección del vector $\vec{v}=4\vec{i}+3\vec{j}$.

Solución:

a) Como el vector $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ no es unitario hay que determinar el vector unitario en la dirección de $\vec{v}$.

Ya que $\|\vec{v}\| = \sqrt{16+9} = 5$, el vector unitario en la dirección del vector $\vec{v}$ es el vector

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$$

La derivada direccional de *f* en (x, y) viene dada por

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(x + \frac{4}{5}t, y + \frac{3}{5}t\right) - f(x,y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{3\left(x + \frac{4}{5}t\right) - 2\left(y + \frac{3}{5}t\right)^2 - 3x + 2y^2}{t}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{12}{5}t - \frac{12}{5}yt - \frac{18}{25}t^2}{t} = \lim_{t \to 0}\left(\frac{12}{5} - \frac{12}{5}y - \frac{18}{25}t\right) = \frac{12}{5} - \frac{12}{5}y$$

b) $$D_{\vec{u}} f(x,y) = \frac{12}{5} - \frac{12}{5}t \Rightarrow D_{\vec{u}} f(4,-1) = \frac{12}{5} - \frac{12}{5}(-1) = \frac{24}{5}$$

10. Sea *f* la función definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) ¿Es la función *f* continua en $(0,0)$?

b) Halle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) ¿En qué dirección existen la derivada direccional de *f* en $(0,0)$?

Solución:

a) Como $f(0,0) = 0$, para estudiar la continuidad se debe analizar la existencia del límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Observe que si $(x,y) \to (0,0)$ entonces, $xy \to 0$ y $x^2 + y^2 \to 0$, y se obtiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

Hay que estudiar el comportamiento de la función cuando $(x,y) \to (0,0)$ a través de diferentes trayectorias, por ejemplo, se puede estudiar el comportamiento de la función cuando (x,y) toma valores próximos a $(0,0)$ a través de cualquier la recta que pase por el origen, de ecuación $y = m\,x$, $m \in R$.

Como

$$f\,(x\,,mx)=\frac{x\,m\,x}{x^2+m^2x^2}=\frac{m\,x^2}{(1+m^2)\,x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

Se tiene que la función tiende a valores diferentes según la pendiente *m* de la recta, por lo tanto, el límite dado no existe.

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f\,(x\,,y)$ no existe, la función *f* no es continua en $(0\,,0)$.

b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f\,(h+0\,,0)-f\,(0\,,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\,(h\,,0)-f\,(0\,,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h\cdot 0}{h^2+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0\,,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f\,(0\,,h+0)-f\,(0\,,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\,(0\,,h)-f\,(0\,,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{0\cdot h}{0^2+h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

Nota: Observe que la existencia de las derivadas parciales en un punto no implica que la función sea continua en el punto, como si se verifica en las funciones reales de una variable real.

c) Sea $\vec{v}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}$ un vector unitario.

$$D_{\vec{v}}\,f\,(0\,,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(0+v_1t\,,0+v_2t\right)-f\,(0\,,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(v_1t\,,v_2t\right)-f\,(0\,,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^2v_1v_2}{t^2\left(v_1^{\,2}+v_2^{\,2}\right)}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{v_1v_2}{t\left(v_1^{\,2}+v_2^{\,2}\right)}$$

- Si $v_1=0$ y $v_2\neq 0$ entonces $Df_{\vec{v}}(0\,,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{0}{tv_2^{\,2}}=\lim\limits_{t\to 0}0=0$
- Si $v_2=0$ y $v_1\neq 0$ entonces $Df_{\vec{v}}(0\,,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{0}{tv_1^{\,2}}=\lim\limits_{t\to 0}0=0$
- Si $v_1\neq 0$ y $v_2\neq 0$ entonces $Df_{\vec{v}}(0\,,0)$ no existe.

Por lo tanto, la derivada direccional de f en $(0\,,0)$ solo existe en la dirección de los ejes de coordenadas.

Nota: Observe que la existencia de las derivadas parciales en un punto no implica la existencia en ese punto de la derivada direccional en cualquier dirección.

11. Demuestre por definición que la función *f* definida por $f\,(x\,,y)=3x-2y^2$ es diferenciable en $(4\,,-1)$.

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-4y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(4,-1)=3 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(4,-1)=4$$

Sea $\vec{h}=(h_1,h_2)$, y supongamos que

$$f((4,-1)+(h_1,h_2))=f(4,-1)+\frac{\partial f}{\partial x}(4,-1)\cdot h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(4,-1)\cdot h_2+r(h_1,h_2)$$

Luego,

$$3(4+h_1)-2(-1+h_2)^2=10+3h_1+4\cdot h_2+r(h_1,h_2)\Rightarrow r(h_1,h_2)=-2h_2^{\ 2}$$

Ahora, se debe evaluar el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{r(h_1\ ,h_2)}{\sqrt{h_1^{\ 2}+h_2^{\ 2}}}$.

Y demostrar que por cualquier trayectoria se tiene que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{-2h_2^{\ 2}}{\sqrt{h_1^{\ 2}+h_2^{\ 2}}}=0$$

Se debe demostrar entonces por definición.

Sea $\varepsilon>0$ dado, se debe hallar un numero $\delta>0$ tal que

$$\text{Si } 0<\sqrt{(h_1-0)^2+(h_2-0)^2}<\delta \text{ entonces } \left|\frac{-2h_2^{\ 2}}{\sqrt{h_1^{\ 2}+h_2^{\ 2}}}-0\right|<\varepsilon$$

Es decir,

$$\text{Si } 0<\sqrt{h_1^{\ 2}+h_2^{\ 2}}<\delta \text{ entonces } \left|\frac{2h_2^{\ 2}}{\sqrt{h_1^{\ 2}+h_2^{\ 2}}}\right|<\varepsilon$$

Como

$$\left|\frac{2h_2^{\ 2}}{\sqrt{h_1^{\ 2}+h_2^{\ 2}}}\right|\le 2\left|\frac{h_1^{\ 2}+h_2^{\ 2}}{\sqrt{h_1^{\ 2}+h_2^{\ 2}}}\right|=2\sqrt{h_1^{\ 2}+h_2^{\ 2}}<2\delta$$

Si se define $2\delta=\varepsilon$ y $0<\sqrt{h_1^{\ 2}+h_2^{\ 2}}<\delta$ se tiene que $\left|\frac{2h_2^{\ 2}}{\sqrt{h_1^{\ 2}+h_2^{\ 2}}}\right|<\varepsilon$.

Por lo tanto, para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0$ tal que

$$(h_1, h_2) \in \mathrm{R}^2 - \{(0,0)\} \text{ y } 0 < \sqrt{h_1^{\ 2} + h_2^{\ 2}} < \delta \text{ se tiene que } \left| \frac{2h_2^{\ 2}}{\sqrt{h_1^{\ 2} + h_2^{\ 2}}} \right| < \varepsilon$$

En consecuencia

$$\lim_{(h_1, h_2) \to (0,0)} \frac{-2h_2^{\ 2}}{\sqrt{h_1^{\ 2} + h_2^{\ 2}}} = 0$$

Y por lo tanto, la función f es diferenciable en $(0,0)$.

12. Resuelva la parte b) del problema 9 sin aplicar la definición de derivada direccional.

Solución:

$$f(x,y) = 3x - 2y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(4,-1) = 3 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(4,-1) = 4$$

Además

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$$

Como f es diferenciable en $(4,-1)$ se tiene que

$$D_{\vec{v}} f(4,-1) = \frac{\partial f}{\partial x}(4,-1) \cdot \frac{4}{5} + \frac{\partial f}{\partial y}(4,-1) \cdot \frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{4}{5} + 4\frac{3}{5} = \frac{24}{5}$$

13. Sea g una función diferenciable definida por $z = g(x,y)$, si la derivada direccional de la función g en $P(1,2)$ en la dirección de $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ es $2\sqrt{2}$ y en la dirección de $\vec{v} = -2\vec{j}$ es -3 ¿Cuál es la derivada de g en $P(1,2)$ en la dirección de $\vec{w} = -\vec{i} - 2\vec{j}$?

Solución:

Como los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son unitarios hay que determinar el vector unitario correspondiente a cada uno de ellos, es decir:

$$\vec{u_1} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}, \quad \vec{v_1} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = -\vec{j} \quad \text{y} \quad \vec{w_1} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$$

Luego

$$D_{\vec{u_1}} f(1,2) = \frac{\partial g(1,2)}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial g(1,2)}{\partial y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad \text{y} \quad D_{\vec{v_1}} f(1,2) = \frac{\partial g(1,2)}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial g(1,2)}{\partial y} \cdot (-1) = -3$$

Al resolver el sistema planteado resulta que

$$\frac{\partial g(1,2)}{\partial x}=1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial g(1,2)}{\partial y}=3$$

Por lo tanto,

$$D_{\vec{w}_1} f(1,2)=\frac{\partial g(1,2)}{\partial x}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\frac{\partial g(1,2)}{\partial y}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{6}{\sqrt{5}}=-\frac{7}{\sqrt{5}}$$

14. Una partícula que busca calor se localiza en el punto $Q(1,4)$ sobre una placa metálica plana, cuya temperatura en un punto (x,y) es $T(x,y)=5-4x^2-y^2$. Determine las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la partícula si esta se mueve en la dirección de máximo aumento de temperatura.

Solución:

Suponga que la trayectoria está representada por las ecuaciones paramétricas $x=x(t)$, $y=x(t)$ donde la partícula en el instante $t=0$ se encuentra en el punto $Q(1,4)$. Dado que la función *T* es polinómica es diferenciable. Como la partícula se mueve en la dirección del aumento máximo de temperatura entonces se mueve en la dirección de $\nabla T(x,y)$, de aquí que su vector velocidad $\vec{v}(t)$ en el tiempo *t* apunta en la dirección de dicho gradiente, luego

$$\vec{v}(t)=-8x\vec{i}-2y\vec{j}$$

Y como

$$\nabla T(x,y)=(x'(t),y'(t))$$

Se tiene que

$$\frac{dx}{dt}=x'(t)=-8x \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt}=y'(t)=-2y \Rightarrow \frac{dx}{x}=-8dt \quad \text{y} \quad \frac{dy}{y}=-2dt$$

Al integrar ambos miembros de ambas igualdades se obtiene que

$$\ln|x|=-8t+C_1 \quad \text{y} \quad \ln|y|=-2t+C_2$$

Para hallar las constantes de integración se considera la condición inicial que en $t=0$ está en $Q(1,4)$, luego,

$$\ln|1|=-8\cdot 0+C_1 \Rightarrow C_1=0 \quad \text{y} \quad \ln|4|=-2\cdot 0+C_2 \Rightarrow C_2=\ln 4$$

En consecuencia,

$$\ln|x|=-8t \quad \text{y} \quad \ln|y|=-2t+\ln 4$$

Y por lo tanto, unas ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la partícula son

$$x = e^{-8t} \qquad y = e^{-2t+\ln 4} = 4e^{-2t}$$

15. Halle los valores de las constantes *a*, *b* y *c* tales que la derivada direccional de $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en el punto $P(1, 2, -1)$ tenga el valor máximo 64 en la dirección paralela al eje z.

Solución:

La función *f* es polinómica luego es diferenciable, y en consecuencia su derivada direccional es máxima cuando el vector $\vec{v}$ tiene la dirección del gradiente.

$$D_{\vec{v}} f(1, 2, -1) = \nabla f(1, 2, -1) \cdot \vec{v}\text{ , con } \left|\vec{v}\right| = 1$$

Se tiene que $\nabla f(x, y, z) = \left(ay^2 + 3cz^2x^2\right)\vec{i} + \left(2axy + bz\right)\vec{j} + \left(by + 2czx^3\right)\vec{k}$, en consecuencia

$$\nabla f(1, 2, -1) = (4a + 3c\, , 4a - b\, , 2b - 2c)$$

Como el vector $\vec{v}$ es unitario y tiene dirección paralela al eje z, se tiene que $\vec{v} = \pm\vec{k}$.

En consecuencia, si $\vec{v} = \vec{k}$

$$D_{\vec{v}} f(1, 2, -1) = \nabla f(1, 2, -1) \cdot \vec{v} = (4a + 3c\, , 4a - b\, , 2b - 2c) \cdot (0\, , 0\, , 1) = 64 \Rightarrow b - c = 32 \quad (1)$$

Por otra parte

$$\nabla f(1, 2, -1) = (4a + 3c\, , 4a - b\, , 2b - 2c) = \lambda\,(0\, , 0\, , 1)$$

De la ecuación vectorial anterior se obtiene:

$$\begin{cases} 4a + 3c = 0 \\ 4a - b = 0 \\ 2b - 2c = \lambda \end{cases} \quad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene que $a = 6, \quad b = 24 \quad \text{y} \quad c = -8$.

¿Qué valores se obtienen para $\vec{v} = -\vec{k}$?

16. Sea $T(x, y)$ la temperatura en el punto (x, y) sobre la circunferencia de ecuación $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ con $0 \le t \le 2\pi$ y suponga que $\dfrac{\partial T(x, y)}{\partial x} = 8x - 4y$, $\dfrac{\partial T(x, y)}{\partial y} = 8y - 4x$.

a) Determine en qué puntos de la circunferencia ocurren las temperatura máxima y mínima examinando las derivadas $\dfrac{\partial T(t)}{\partial t} = T'(t)$ y $\dfrac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = T''(t)$

b) Sea $T(x,y) = 4x^2 - 4xy + 4y^2$. Determine los valores extremos absolutos de *T* sobre la circunferencia.

Solución:

a)

$$T'(t) = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (8x - 4y)(-\operatorname{sen} t) + (8y - 4x)\cos t = -8x\operatorname{sen} t + 4y\operatorname{sen} t + 8y\cos t - 4x\cos t$$

$$= -8\cos t\operatorname{sen} t + 4\operatorname{sen}^2 t + 8sen\,t\cos t - 4\cos^2 t \;= 4\left(sen^2 t - \cos^2 t\right) = -4\cos 2t$$

$$T'(t) = 0 \Leftrightarrow -4\cos 2t = 0 \Leftrightarrow \cos 2t = 0 \Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$$

Como $0 \le t \le 2\pi$, los puntos o valores críticos son $t_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $t_2 = \dfrac{3\pi}{4}$, $t_3 = \dfrac{5\pi}{4}$ y $t_4 = \dfrac{7\pi}{4}$

Por otra parte,

$$T''(t) = 8\operatorname{sen} 2t$$

$$T''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8 > 0 \Rightarrow \text{ en } t_1 = \frac{\pi}{4} \text{ la temperatura alcanza un mínimo local}$$
$$T''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 8\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -8 < 0 \Rightarrow \text{ en } t_2 = \frac{3\pi}{4} \text{ la temperatura alcanza un máximo local}$$
$$T''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 8\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 8 > 0 \Rightarrow \text{ en } t_3 = \frac{5\pi}{4} \text{ la temperatura alcanza un mínimo local}$$
$$T''\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 8\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{2}\right) = -8 < 0 \Rightarrow \text{ en } t_4 = \frac{7\pi}{4} \text{ la temperatura alcanza y un máximo local}$$

En conclusión, en $t = \dfrac{\pi}{4}$ y $t = \dfrac{5\pi}{4}$ la temperatura alcanza un mínimo absoluto y en $t = \dfrac{3\pi}{4}$ y $t = \dfrac{7\pi}{4}$ la temperatura alcanza un máximo absoluto. ¿Por qué?

b) $T(x,y) = 4x^2 - 4xy + 4y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial T(x,y)}{\partial x} = 8x - 4y$ y $\dfrac{\partial T(x,y)}{\partial y} = 8y - 4x$.

En función de *t*:

$$T(t) = 4\cos^2 t - 4\cos t\,sen\,t + 4\operatorname{sen}^2 t = 4 - 2\operatorname{sen}2t \Rightarrow T'(t) = -4\cos 2t$$

Luego, de a) se concluye que

El máximo absoluto es: $T\left(\frac{3\pi}{4}\right)=T\left(\frac{7\pi}{4}\right)=4-2\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=4-2sen\left(\frac{7\pi}{2}\right)=4+2=6$

El mínimo absoluto es: $T\left(\frac{\pi}{4}\right)=T\left(\frac{5\pi}{4}\right)=4-2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=4-2sen\left(\frac{5\pi}{2}\right)=4-2=2$

17. Una función real de dos variables $w=f(x,y)$, con segundas derivadas parciales continuas que satisfaga la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

Se denomina función armónica. Muestre que la función $w=f(x,y)=x^3-3xy^2$ es armónica.

Solución:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=3x^2-3y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=6x \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial y}=-6xy \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-6x$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=6x-6x=0$$

18. Sea $z=f(x,y)$ una función que admite derivadas parciales, y sean $x=u+v$ y $y=u-v$. Demuestre que $(z_x)^2-(z_y)^2=z_u\,z_v$.

Solución:

Como *z* es función de *x* y *y*, y a su vez *x* y *y* son funciones de *u* y *v*, por la regla de la cadena se tiene que:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y} \quad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que

$$z_u\,z_v=\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=(z_x)^2-(z_y)^2$$

19. Si ϕ es una función real diferenciable. Pruebe que la función *f* definida por

$$f(x,y)=x^3\phi\left(x^2-y\right)$$

satisface la ecuación $x\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+2x^2\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3f(x,y)$

Solución:

Como $x^3\phi\left(x^2-y\right)$ es el producto de x^3 por una función ϕ que depende de una variable $u=x^2-y$, que a su vez depende de *"x"* y *de "y"*, se tiene que:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=3x^2\phi\left(x^2-y\right)+x^3\phi'\left(x^2-y\right)\cdot 2x$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=3x^2\phi\left(x^2-y\right)+2x^4\phi'\left(x^2-y\right) \qquad (1)$$

Para calcular $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ se aplica la fórmula de la derivada de una constante por una función:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x^3\phi'\left(x^2-y\right)\cdot(-1)$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-x^3\phi'\left(x^2-y\right) \qquad (2)$$

De (1) y (2)

$$x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+2x^2\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3x^3\phi\left(x^2-y\right)+2x^5\phi'\left(x^2-y\right)-2x^5\phi'\left(x^2-y\right)=$$
$$3x^3\phi\left(x^2-y\right)=3f(x,y)$$

20. Sean *f* y *g* funciones reales y diferenciables. Sea $\phi(x,t)=f(x-t)+g(x+t)$. Pruebe que ϕ satisface la ecuación de la onda: $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$.

Solución:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=-f'(x-t)+g'(x+t)\Rightarrow\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=f''(x-t)+g''(x+t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=f'(x-t)+g'(x+t)\Rightarrow\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=f''(x-t)+g''(x+t) \quad (2)$$

De (1) y (2) se tiene que $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$

21. **a**) Verifique que $z = f(x,y) = \ln\left(e^x + e^y\right)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

b) Demuestre que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

Solución:

a) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y}$$

Luego,

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} = \frac{e^x + e^y}{e^x + e^y} = 1$$

b) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{e^x\left(e^x + e^y\right) - e^x e^x}{\left(e^x + e^y\right)^2} = \frac{e^x e^y}{\left(e^x + e^y\right)^2} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{e^y\left(e^x + e^y\right) - e^y e^y}{\left(e^x + e^y\right)^2} = \frac{e^x e^y}{\left(e^x + e^y\right)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$= \frac{e^{2y}e^{2x}}{\left(e^x + e^y\right)^4}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{e^y e^x}{\left(e^x + e^y\right)^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{e^{2y}e^{2x}}{\left(e^x + e^y\right)^4}$$

Luego,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{e^{2y}e^{2x}}{\left(e^x + e^y\right)^4} - \frac{e^{2y}e^{2x}}{\left(e^x + e^y\right)^4} = 0$$

22. Sea f la función definida por $w = f(u,v)$ y sean $u = \dfrac{x^2 - y^2}{2}$ y $v = xy$. Demuestre que si f satisface la ecuación de Laplace en las variables "*u*" y "*v*" entonces f también satisface la ecuación de Laplace en las variables "*x*" y "*y*", es decir $\dfrac{\partial^2 f(u,v)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f(u,v)}{\partial y^2} = 0$

Solución:

Al calcular

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v} = x\, f_u + y\, f_v$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-y\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v}=-y\,f_u+xf_v$$

Para calcular las derivadas segundas de *f* con respecto a *x* y *y*, se debe tener en cuenta que sus derivadas $f_u=\frac{\partial f}{\partial u}$ y $f_v=\frac{\partial f}{\partial v}$ también son funciones de "*x*" y "*y*".

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(x\,f_u+y\,f_v\right)}{\partial x}=f_u+x\frac{\partial f_u}{\partial x}+y\frac{\partial f_v}{\partial x}=f_u+x\left[\frac{\partial f_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]+y\left[\frac{\partial f_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$=f_u+x\left[x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\right]+y\left[x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right]=f_u+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial\left(-y\,f_u+x\,f_v\right)}{\partial y}=-f_u-y\frac{\partial f_u}{\partial y}+x\frac{\partial f_v}{\partial y}=-f_u-y\left[\frac{\partial f_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]+x\left[\frac{\partial f_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

$$=-f_u-y\left[-y\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+x\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\right]+x\left[-y\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial y}+x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right]-f_u+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Al sustituir los valores de las derivadas resulta:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_u+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-f_u+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$
$$=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\;x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\left(x^2+y^2\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)=\left(x^2+y^2\right)\cdot 0=0$$

23. Sea $z=f(u,v)=f\left(x-\frac{y}{2},x+\frac{y}{2}\right)$ demuestre que si *f* es una función de clase C^2 entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$$

Solución:

Sea $u=x-\frac{y}{2}$ y $v=x+\frac{y}{2}$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}=f_u+f_v$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{1}{2}f_u+\frac{1}{2}f_v$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial f_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial f_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\right] + \frac{1}{4}\left[-\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$-4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$$

Sustituyendo los valores obtenidos, se obtiene que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$$

24. Sea $z = f(x, y) = y\varphi\left(y^2 - x^2, x^2 - y^2\right)$ donde φ una función real de dos variables de diferenciable . Pruebe que

$$\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y}$$

Solución:

Sea $u = y^2 - x^2$ y $v = x^2 - y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right] = -2xy\frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2xy\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = y\left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right] + \varphi(u, v) = 2y^2\frac{\partial \varphi}{\partial u} - 2y^2\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \varphi(u, v)$$

Sustituyendo los valores obtenidos, se obtiene que:

$$\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -2y^2\frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2y^2\frac{\partial \varphi}{\partial v} + 2y^2\frac{\partial \varphi}{\partial u} - 2y^2\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \varphi(u, v) = \varphi(u, v) = \varphi\left(y^2 - x^2, x^2 - y^2\right) = \frac{z}{y}$$

25. Sea $F(x, y) = \varphi\left(xy, x^2 y^2\right)$, donde φ una función real de dos variables, de clase C^2. Demuestre que:

$$\frac{x}{y}\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=0$$

Solución:

Sean $u = xy$ y $v = x^2y^2$, se tiene entonces que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=y\frac{\partial \varphi}{\partial u}+2xy^2\frac{\partial \varphi}{\partial v}\Rightarrow\frac{x}{y}\frac{\partial F}{\partial x}=x\frac{\partial \varphi}{\partial u}+2x^2y\frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=x\frac{\partial \varphi}{\partial u}+2x^2y\frac{\partial \varphi}{\partial v}\Rightarrow-\frac{\partial F}{\partial x}=-x\frac{\partial \varphi}{\partial u}-2x^2y\frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad (2)$$

De 1) y 2) se concluye que

$$\frac{x}{y}\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}=x\frac{\partial \varphi}{\partial u}+2x^2y\frac{\partial \varphi}{\partial v}-x\frac{\partial \varphi}{\partial u}-2x^2y\frac{\partial \varphi}{\partial v}=0$$

26. Sea $G(\rho,\alpha)=g(\rho\cos\alpha,\rho\operatorname{sen}\alpha)$, donde g es una función real de dos variables diferenciable.

a) Pruebe que

$$\frac{\partial G}{\partial \rho}=\cos\alpha\frac{\partial g}{\partial x}+\operatorname{sen}\alpha\frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial G}{\partial \alpha}=-\rho\, sen\alpha\frac{\partial g}{\partial x}+\rho\cos\alpha\frac{\partial g}{\partial y}$$

b) Utilice a) para probar que

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\cos\alpha\frac{\partial G}{\partial \rho}-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\rho}\frac{\partial G}{\partial \alpha} \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial y}=sen\alpha\frac{\partial G}{\partial \rho}+\frac{\cos\alpha}{\rho}\frac{\partial G}{\partial \alpha}$$

Solución:

a) Sea $x=\rho\cos\alpha$ y $y=\rho\operatorname{sen}\alpha$.

$$\frac{\partial G}{\partial \rho}=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}=\cos\alpha\frac{\partial g}{\partial x}+\operatorname{sen}\alpha\frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha}=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}=-\rho\, sen\alpha\frac{\partial g}{\partial x}+\rho\cos\alpha\frac{\partial g}{\partial y}$$

b) Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial G}{\partial \rho}=\cos\alpha\frac{\partial g}{\partial x}+\operatorname{sen}\alpha\frac{\partial g}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = -\rho\, sen\alpha \frac{\partial g}{\partial x} + \rho \cos\alpha \frac{\partial g}{\partial y} \quad (2)$$

Multipliquemos ambos miembros de (1) por $\rho\, sen\alpha$ y ambos miembros de (2) por $\cos\alpha$ para obtener

$$\rho \operatorname{sen}\alpha \frac{\partial G}{\partial \rho} = \rho \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \frac{\partial g}{\partial x} + \rho \operatorname{sen}^2\alpha \frac{\partial g}{\partial y} \quad (3)$$

$$\cos\alpha \frac{\partial G}{\partial \alpha} = -\rho\, sen\alpha \cos\alpha \frac{\partial g}{\partial x} + \rho \cos^2\alpha \frac{\partial g}{\partial y} \quad (4)$$

Sumando miembro a miembro (3) y (4) se obtiene

$$\rho \operatorname{sen}\alpha \frac{\partial G}{\partial \rho} + \cos\alpha \frac{\partial G}{\partial \alpha} = \rho \operatorname{sen}^2\alpha \frac{\partial g}{\partial y} + \rho \cos^2\alpha \frac{\partial g}{\partial y} = \rho \frac{\partial g}{\partial y}$$

Luego

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \operatorname{sen}\alpha \frac{\partial G}{\partial \rho} + \frac{\cos\alpha}{\rho} \frac{\partial G}{\partial \alpha}$$

De manera similar, multipliquemos ambos miembros de (1) por $-\rho\cos\alpha$ y ambos miembros de (2) por $sen\alpha$ para obtener

$$-\rho\cos\alpha \frac{\partial G}{\partial \rho} = -\rho\cos^2\alpha \frac{\partial g}{\partial x} - \rho \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \frac{\partial g}{\partial y} \quad (5)$$

$$\operatorname{sen}\alpha \frac{\partial G}{\partial \alpha} = -\rho\, sen^2\alpha \frac{\partial g}{\partial x} + \rho \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha \frac{\partial g}{\partial y} \quad (6)$$

Sumando miembro a miembro (5) y (6) se obtiene

$$-\rho\cos\alpha \frac{\partial G}{\partial \rho} + \operatorname{sen}\alpha \frac{\partial G}{\partial \alpha} = -\rho\cos^2\alpha \frac{\partial g}{\partial x} - \rho\, sen^2\alpha \frac{\partial g}{\partial x} = -\rho \frac{\partial g}{\partial x}$$

Luego,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \cos\alpha \frac{\partial G}{\partial \rho} - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\rho} \frac{\partial G}{\partial \alpha}$$

27. Suponga que la porción de un árbol que se puede utilizar para madera es un cilindro circular recto. Si la altura utilizable del árbol aumenta 20 pulgadas por año y el diámetro utilizable aumenta 3 pulgadas por año. ¿Qué tan rápidamente crece el volumen de madera utilizable, cuando la altura utilizable del árbol es de 200 pulgadas y el diámetro es de 30 pulgadas.

Solución:

Se conoce que el volumen de un cilindro circular recto en función del diámetro y la altura es

$$V(d,h)=\frac{\pi}{4}d^2h$$

se debe determinar $\frac{dV}{dt}$ para $h=20$ pulg y $d=30$ pulg.

Como la altura *h* y el diámetro *d* son funciones del tiempo *t*, se tiene que:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial d}\frac{dd}{dt}+\frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}=\frac{\pi}{4}2dh\frac{dd}{dt}+\frac{\pi}{4}d^2\frac{dh}{dt}$$

Sustituyendo los valores:

$$\frac{dh}{dt}=20\frac{\text{pul}}{\text{año}};\qquad \frac{dd}{dt}=3\frac{\text{pul}}{\text{año}}$$

Se tiene que

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{\substack{\text{h=200pul}\\ \text{d=30pul}}}=\frac{\pi}{2}30\text{pul}\cdot 200\text{pul}\cdot 3\frac{\text{pul}}{\text{año}}+\frac{\pi}{4}900\text{pul}^2\,20\frac{\text{pul}}{\text{año}}=13500\frac{\text{pul}^3}{\text{año}}$$

28. La ecuación

$$x^2z+3y=z^2$$

define a *z* como función implícita de las variables *x* e *y*, es decir, existe al menos una función *f* tal que $z=f(x,y)$ que satisface dicha ecuación. Pruebe que:

$$\frac{z_x}{2xz_y}=\frac{z}{3},\quad x\neq 0$$

Solución:

$$x^2z+3y=z^2$$

Derivando, ambos miembros, con respecto a la variable *x*, resulta

$$2x\,z+x^2z_x=2z\,z_x$$

Al despejar z_x se obtiene

$$z_x=-\frac{2xz}{x^2-2z}\qquad (1)$$

De igual forma, derivando ambos miembros con respecto a y, resulta,

$$x^2\,z_y+3=2z\,z_y$$

Al despejar z_y se obtiene

$$z_y = -\frac{3}{x^2 - 2z} \quad (2)$$

De 1) y 2) se concluye que

$$\frac{z_x}{2xz_y} = \frac{\dfrac{-2xz}{x^2 - 2z}}{\dfrac{2x(-3)}{x^2 - 2z}} = \frac{z}{3}$$

29. La ecuación $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ determina a *z* como función implícita de las variables *"x"* y *"y"*.

a) Halle $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

b) Si se consideran a *z* y *y* funciones de *x* que vienen dadas por las ecuaciones

$$xyz = a \quad \text{y} \quad x + y + z = b$$

Con *a* y *b* constantes. Halle $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dy}$

Solución:

a) Derivando ambos miembros de la ecuación $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ con respecto a *x* resulta

$$3x^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} - 3yz - 3xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Al despejar $\frac{\partial z}{\partial x}$ se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x^2 + yz}{z^2 - xy}$$

Derivando ambos miembros de la ecuación $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ con respecto a *y* resulta

$$3y^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} - 3xz - 3xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Al despejar $\frac{\partial z}{\partial y}$ se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y^2 + xz}{z^2 - xy}$$

b) Al derivar ambos miembros de cada una de las ecuaciones $xyz = a$ y $x + y + z = b$ con respecto a *x* se obtiene el sistema de ecuaciones

$$yz + xz\frac{dy}{dx} + xy\frac{dz}{dx} = 0 \quad \text{y} \quad 1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0$$

Cuya solución es $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z(x-y)}{x(y-z)}$ y $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{y(z-x)}{x(y-z)}$.

30. Si S_1 y S_2 son las gráficas de las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y $z = x^2 + y^2$ respectivamente.

a) Halle la intersección de S_1 y S_2, y además verifique que el punto $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) \in S_1 \cap S_2$.

b) Halle las ecuaciones de los planos tangentes a S_1 y S_2 en el punto $P_0\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

c) Determine una ecuación de la recta L tangente a la curva de intersección de los planos tangentes de S_1 y S_2 en el punto $P_0\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

Solución:

a) Para hallar la intersección de las dos superficies se debe resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$.

Observe que la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ representa una esfera de origen $O(0,0,0)$ y radio $\sqrt{2}$, y $z = x^2 + y^2$ representa un paraboloide elíptico.

De la primera ecuación se obtiene que

$$2 - z^2 = x^2 + y^2 \quad (1)$$

De la segunda ecuación resulta

$$z = x^2 + y^2 \quad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene que

$$2 - z^2 = z \Leftrightarrow z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \quad \text{ó} \quad z = -2$$

Como $z \geq 0$ la solución es $z = 1$.

Luego, la ecuación de la curva *C* de intersección de ambas superficies es

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Que representa una circunferencia de radio 1 en el plano $z = 1$.

Observe que $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) \in S_1 \cap S_2$, ya que $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$ y $z = 1$.

b) Sea S_1 la gráfica de la superficie de nivel $f(x, y, z) = 2$, donde f es una función de R^3 en R definida como

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$$

El gradiente de f es:

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

Luego

El gradiente de f en el punto $P_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ es:

$$\nabla f(P_0) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\right)$$

La ecuación del plano tangente a la superficie S_1 en el punto $P_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ es:

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}, y - \frac{\sqrt{2}}{2}, z - 1\right) \cdot \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\right) = 0$$

Al operar se obtiene,

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2z - 4 = 0 \quad \text{o} \quad x + y + \sqrt{2}z - 2\sqrt{2} = 0$$

Sea S_2 la gráfica de la superficie de nivel $g(x, y, z) = 0$, donde g es una función de R^3 en R definida como

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

El gradiente de *g* es:

$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, -1)$$

Luego

El gradiente de *g* en el punto $P_0\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ es:

$$\nabla g(P_0)=\left(\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\,,-1\right)$$

La ecuación del plano tangente a la superficie S_2 en el punto $P_0\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ es:

$$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2},y-\frac{\sqrt{2}}{2},z-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\,,-1\right)=0$$

Al operar resulta,

$$\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-z-1=0$$

c) El vector director $\vec{v}$ de la recta tangente *L* es ortogonal a los vectores $\overrightarrow{n_1}=\left(1,1,\sqrt{2}\right)$ y $\overrightarrow{n_2}=\left(\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\,,-1\right)$, en consecuencia se obtiene mediante

$$\vec{v}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(-3,3,0)=3(-1,1,0)$$

Por lo tanto, una de las ecuaciones de la recta *L* en P_0 es

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-t \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}$$

31. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie S definida por $z=x^2+xy$; que sea perpendicular a los planos de ecuaciones:

$$\pi_1:\quad x+y-z=0 \ \text{ y } \ \pi_2:\quad 2x-y+z-4=0$$

Solución:

Primero se debe hallar el punto de la superficie S donde el plano tangente es perpendicular a los planos dados.

Sea S la gráfica de la superficie de nivel $f(x,y,z)=0$, donde *f* es una función de $\mathbb{R}^3$ en R definida como

$$f(x,y,z)=x^2+xy-z$$

El gradiente de f es:

$$\nabla f(x,y,z)=(2x+y\,,x\,,-1)$$

Si $\mathrm{P}_0\,(x_0\,,y_0\,,z_0)$ es un punto cualquiera de la superficie S, se tiene que el gradiente de f evaluado en el punto $\mathrm{P}_0\,(x_0\,,y_0\,,z_0)$ es:

$$\nabla f(x_0\,,y_0\,,z_0)=(2x_0\,+y_0\,,x_0\,,-1)$$

El vector normal $\vec{n}=\nabla f\,(P_0)$ del plano tangente debe ser ortogonal a los vectores $\overrightarrow{n_1}=(1,1,-1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(2,-1,1)$, en consecuencia:

$$\vec{n}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(1,1,-1)\times(2,-1,1)=(0,-3,-3)=-3(0,1,1)$$

Puesto que $\nabla f\,(P_0)$ y $\vec{n}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$ son paralelos debe existir $\lambda\in R$ tal que

$$(2x_0\,+y_0\,,x_0\,,-1)=\lambda\,(0,1,1)$$

De lo cual se obtiene que

$$\begin{cases}2x_0+y_0=0\\ x_0=\lambda\\ -1=\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-1\\ y_0=2\\ \lambda=-1\end{cases}$$

Como el punto a determinar está en la superficie, en consecuencia satisface la ecuación $z=x^2+xy$ se tiene $z=-1$.

El punto de la superficie S en el cual el plano tangente es perpendicular a los planos dados es $\mathrm{P}_0\,(-1,2,-1)$ y la ecuación del plano tangente en dicho punto es

$$(x+1,y-2,z+1)\cdot(0,1,1)=0 \quad \text{ó} \quad y+z-1=0$$

32. Determine los puntos del hiperboloide de una hoja de ecuación $x^2-y^2+2z^2=1$, en los cuales la recta normal es paralela a la recta que pasa por los puntos $(3,-1,0)$ y $(5,3,6)$.

Solución:

Para resolver el problema hay que determinar los vectores directores de ambas rectas.

Sea S la gráfica de la superficie de nivel $f(x,y,z)=0$, donde f es una función de R^3 en R definida como

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2 - 1$$

El vector director de la recta normal en un punto de la curva es el vector $\nabla f(x,y,z)$ evaluado en el punto considerado.

El gradiente de la función *f* es:

$$\nabla f(x,y,z) = 2x\vec{i} - 2y\vec{j} + 4z\vec{k}$$

La recta normal es paralela a la recta que pasa por los puntos $(3,-1,0)$ y $(5,3,6)$, cuyo vector director es $\vec{v_1} = (2,4,6)$.

Si el vector $\nabla f(x,y,z)$ es paralelo al vector $\vec{v_1}$ se tiene que

$$\nabla f(x,y,z) = 2x\vec{i} - 2y\vec{j} + 4z\vec{k} = \lambda\left(2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}\right)$$

De la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda \\ -2y = 4\lambda \\ 4z = 6\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \dfrac{3}{2}\lambda \end{cases} \quad (1)$$

Como el punto está en la superficie, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$. Luego, al sustituir los valores de *x*, *y* y *z* obtenidos en (1), resulta

$$\lambda^2 - (2\lambda)^2 + 2\left(\frac{3}{2}\lambda\right)^2 = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \lambda = -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{ó} \quad \lambda = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Por lo tanto, los puntos que satisfacen la condición requerida son:

$$P_1\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \text{ y } P_2\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 2\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

33. Halle el valor de las constantes *a* y *b* de forma tal que el plano tangente a la superficie de ecuación $x^4 - y + z = 0$ en el punto $P(a,b,1)$ sea perpendicular a la recta de ecuación $\dfrac{x-3}{32} = 1 - y = z + 4$.

Solución:

El plano tangente en el punto $P(a\,,b\,,1)$ es perpendicular a las rectas dadas si el vector normal del plano es paralelo al vector director de la recta, luego, hay que determinar el vector normal del plano en el punto dado.

Sea *S* la gráfica de la de la superficie de nivel $f(x,y,z)=0$, donde f es una función de R^3 en R definida como

$$f\,(x\,,y\,,z)=x^4-y+z$$

El vector normal del plano tangente en un punto de la curva es el vector $\nabla f(x,y,z)$evaluado en el punto considerado.

El gradiente de la función f es:

$$\nabla f\,(x,y,z)=4x^3\,\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

Luego,

$$\nabla f(a,b,1)=4a^3\,\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

El plano tangente en el punto $P(a\,,b\,,1)$ es perpendicular a la recta de ecuación $\frac{x-3}{32}=1-y=z+4$ si el vector $\nabla f(x,y,z)$evaluado en el punto $P(a\,,b\,,1)$ es paralelo al vector director de la recta $\vec{v}=32\,\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, luego se debe cumplir que:

$$\left(4a^3,-1,1\right)\times\left(32\,,-1\,,1\right)=\vec{0}$$

De la ecuación vectorial anterior resulta:

$$\begin{cases} -1+1=0 \\ 32-4a^3=0 \\ -4a^3+32=0 \end{cases}$$

De donde se obtiene: $a=2$.

Para obtener el valor de b, observe que el punto P pertenece a la superficie, por lo tanto satisface su ecuación, se obtiene así:

$$a^4-b+1=0\Rightarrow b=(2)^4+1=17$$

34. Dada la superficie *S* de ecuación $z=\dfrac{a^2}{xy}$, con $xy\neq 0$ y $a\in R$. Demuestre que el plano tangente a dicha superficie en cualquier punto de ella, forma con los planos coordenados un tetraedro de volumen constante, es decir, no depende del punto considerado.

Solución:

Para resolver este problema, se consideran tres subproblemas:

i) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie *S* en un punto cualquiera $\mathrm{P}_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$.

ii) Determinar las intersecciones del plano tangente con los planos de coordenadas.

iii) Determinar el volumen del tetraedro formado.

i) Sea *S* la gráfica de la superficie de nivel $f(x,y,z)=0$, donde *f* es una función de R^3 en *R* definida como

$$f(x,y,z)=\frac{a^2}{xy}-z$$

El gradiente de *f* es: $\nabla f(x,y,z)=\left(-\dfrac{a^2}{x^2y},-\dfrac{a^2}{xy^2},-1\right)$

Si $\mathrm{P}_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ es un punto cualquiera de la superficie *S*, se tiene que el gradiente de *f* evaluado en el punto $\mathrm{P}_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ es:

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\left(-\frac{a^2}{x_0{}^2y_0},-\frac{a^2}{x_0y_0{}^2},-1\right)$$

La ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $f(x,y,z)=0$ en el punto $\mathrm{P}_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ es:

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot\left(-\frac{a^2}{x_0{}^2y_0},-\frac{a^2}{x_0y_0{}^2},-1\right)=0$$

De donde,

$$-\frac{a^2}{x_0^2y_0}x-\frac{a^2}{x_0y_0^2}y-z+\frac{a^2}{x_0y_0}+\frac{a^2}{x_0y_0}+z_0=0$$

Como

$$z_0=\frac{a^2}{x_0y_0}$$

Se tiene que la ecuación del plano tangente es:

$$\pi_T:\quad \frac{a^2}{x_0^2y_0}x+\frac{a^2}{x_0y_0^2}y+z=\frac{3a^2}{x_0y_0}$$

ii) Ahora se debe hallar las intersecciones de π_T con los ejes coordenados:

$$x=y=0\Rightarrow z=\frac{3a^2}{x_0y_0};\quad x=z=0\Rightarrow y=3y_0;\ y=z=0\Rightarrow x=3x_0$$

El plano tangente interseca al plano

xy en la recta que pasa por los puntos $(3x_0\ ,\ 0\ ,0)$ y $(0,\ 3y_0\ ,0)$
xz en la recta que pasa por los puntos $(3x_0\ ,\ 0\ ,0)$ y $(0,\ 0\ ,3z_0)$
yz en la recta que pasa por los puntos $(0,\ 3y_0\ ,0)$ y $(0,\ 0\ ,3z_0)$

iii) La altura del tetraedro es $h=\left|\dfrac{3a^2}{x_0 y_0}\right|$. El volumen del tetraedro formado es:

$$V=\frac{1}{6}\left(|3x_0|\cdot|3y_0|\left|\frac{3a^2}{x_0 y_0}\right|\right)=\frac{9}{2}a^2$$

El cual es constante, es decir no depende del punto P_0.

35. Determine los puntos del elipsoide de ecuación**:** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ dónde su plano tangente corta a los ejes coordenados en puntos equidistantes al origen de coordenadas.

Solución:

Sea *S* la gráfica de la superficie de nivel $f(x,y,z)=0$, donde *f* es una función de R^3 en *R* definida como

$$f\,(x\,,y\,,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$$

El vector normal del plano tangente en un punto de la curva es el vector $\nabla f(x\,,y\,,z)$ evaluado en el punto considerado.

El gradiente de la función *f* en un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ es:

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\frac{2x_0}{a^2}\,\vec{i}+\frac{2y_0}{b^2}\,\vec{j}+\frac{2z_0}{c^2}\,\vec{k}$$

La ecuación del plano tangente en un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ de la superficie es

$$(x-x_0\ ,y-y_0\ ,z-z_0)\cdot\left(\frac{2x_0}{a^2},\ \frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right)=0$$

De donde

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$$

Los puntos $P(x_0, y_0, z_0)$ de intersección del plano tangente con los ejes de coordenadas viene dados por

$$y = z = 0 \Rightarrow x = \frac{a^2}{x_0} \qquad x = z = 0 \Rightarrow y = \frac{b^2}{y_0} \qquad x = y = 0 \Rightarrow z = \frac{c^2}{z_0}$$

Los puntos del elipsoide de ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ dónde su plano tangente corta a los ejes coordenados en puntos equidistantes al origen de coordenadas satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\frac{a^2}{x_0} = \frac{b^2}{y_0} = \frac{c^2}{z_0} \quad \text{y} \quad \frac{x_0{}^2}{a^2} + \frac{y_0{}^2}{b^2} + \frac{z_0{}^2}{c^2} = 1$$

De donde se obtienen los puntos:

$$P_1\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^a + b^2 + c^2}}, \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right)$$

y

$$P_2\left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, -\frac{b^2}{\sqrt{a^a + b^2 + c^2}}, -\frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right)$$

36. Determine los máximos, mínimos y puntos de ensilladura de la función f definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2 y + 4$$

Solución:

$$f_x(x, y) = 2x + 2xy \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 2y + x^2$$

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x(1 + y) = 0 \\ 2y + x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{o} \quad y = -1 \\ \qquad y = -\frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Se obtienen así los siguientes puntos críticos: $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -1)$ y $(-\sqrt{2}, -1)$.

Al calcular las segundas derivadas parciales y $D(x, y)$, resulta:

$$f_{xx}(x, y) = 2 + 2y, \quad f_{yy}(x, y) = 2 \quad , \quad f_{xy}(x, y) = 2x \quad \text{y} \quad D(x, y) = 2(2 + 2y) - 4x^2 = 4 + 4y - 4x^2$$

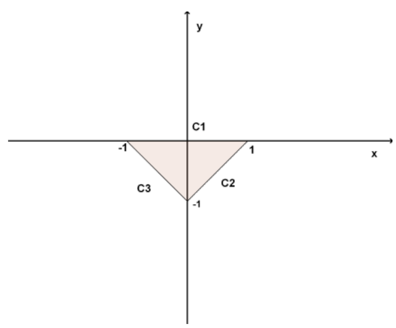
$D(0, 0) = 4 > 0$ y $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$, entonces $f(0, 0) = 4$ es un mínimo local

$D\left(\sqrt{2}\,,-1\right)=4-4-8=-8<0$, entonces $\left(\sqrt{2}\,,0\right)$ es un punto de silla.
$D\left(-\sqrt{2}\,,-1\right)=4-4-8=-8<0$, entonces $\left(-\sqrt{2}\,,0\right)$ es un punto de silla.

37. Sea f la función definida por $f(x,y)=xy+y+x+1$, y sea *R* región triangular de vértices $(1,0)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$.
a) Represente gráficamente la región *R* y determine los puntos de *R* en los cuales la función *f* podría alcanzar los valores extremos absolutos.
b) Halle el máximo y el mínimo absoluto de la función *f* .

Solución:

La región *R* se muestra sombreada en la figura



a) **i**) En el interior de la región:

$$f_x(x,y)=y+1 \quad \text{y} \quad f_y(x,y)=x+1$$

$$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0 \Rightarrow x=y=-1$$

Observe que el punto $P(-1,-1)$ no está en el interior de la región, en consecuencia, no hay punto críticos en el interior.

ii) En la frontera de la región:

Sea C_1 el segmento definido por: $y=0, \quad -1\le x\le 1$

$$f\,(x,0)=x+1,\ -1\le x\le 1$$

$\dfrac{d(x+1)}{dx}=1\neq 0 \Rightarrow$ la función *f* es constante sobre C_1

Los puntos a estudiar en C_1 son los extremos del segmento: $P_1(-1,0)$ y $P_2(1,0)$.

Sea C_2 el segmento definido por: $y=x-1, \quad 0\le x\le 1$.

$$f\left(x, x-1\right)=x^2+x\,, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$\frac{d\left(x^2+x\right)}{dx}=2x+1 \text{ y } \quad 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}. \text{ Observe que } -\frac{1}{2}\notin\left[0,1\right]$$

Los puntos a estudiar en C_2 son los extremos del segmento: $P_2\left(1,0\right)$ y $P_3\left(0,-1\right)$.

Sea C_3 el segmento definido por: $y=-x-1, \quad -1\le x\le 0$.

$$f\left(x,-x-1\right)=-x^2-x\,, \quad -1\le x\le 0$$

$$\frac{d\left(-x^2-x\right)}{dx}=-2x-1 \text{ y } \quad -2x-1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}. \text{ Observe que } -\frac{1}{2}\in\left[-1,0\right]$$

Los puntos a estudiar en C_3 son los extremos del segmento: $P_1\left(-1,0\right)$ y $P_3\left(0,-1\right)$ y el punto $P_4\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

Por lo tanto, los puntos de la región *R* donde pueden ocurrir los valores extremos absolutos son: $P_1\left(-1,0\right)$, $P_2\left(1,0\right)$, $P_3\left(0,-1\right)$ y $P_4\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

b) Las imágenes de los puntos obtenidos en a) son

$$f(-1,0)=0\,,\quad f(1,0)=2\,,\quad f(0,-1)=0\,,\quad f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

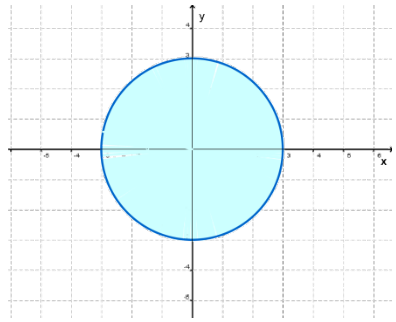
Se tiene entonces que:

El máximo absoluto es $f(1,0)=2$ y el mínimo absoluto es $f(-1,0)=f(0,-1)=0$.

38. Sea *f* una función real de dos variables definida por $f(x,y)=x^2+y^2-3x-xy$. Halle los valores máximo y mínimo absoluto de la función sobre la región R, donde $\mathrm{R}=\left\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\le 9\right\}$.

Solución:

La región R se muestra en la figura



i) En el interior de la región:

$$f_x(x,y) = 2x - 3 - y \quad \text{y} \quad f_y(x,y) = 2y - x$$

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{y} \quad y = 1$$

Observe que el punto $P(2,1)$ está en el interior de la región, en consecuencia, es un punto o valor crítico de R.

ii) En la frontera de la región:

Por Lagrange, se hallan los puntos donde ocurren los valores extremos de $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x - xy$, sujeta a la condición $g(x,y) = 9$ con $g(x,y) = x^2 + y^2$.

Como

$$\nabla f(x,y) = (2x - 3 - y)\vec{i} + (2y - x)\vec{j} \quad \text{y} \quad \nabla g(x,y) = 2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$$

Los valores extremos ocurren en los puntos de la frontera que son solución de las ecuaciones ecuaciones

$$\nabla f(x,y) = \lambda\, \nabla g(x,y) \quad \text{y} \quad g(x,y) = x^2 + y^2$$

O equivalentemente del sistema

$$\begin{cases} 2x - 3 - y = 2\lambda\, x \\ 2y - x = 2\lambda\, y \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Se presenta tres casos:

a) $x \neq 0$ y $y \neq 0$ b) $x = 0$ y $y \neq 0$ c) $x \neq 0$ y $y = 0$

a) Si $x \neq 0$ de la primera ecuación resulta $\lambda = \dfrac{2x - 3 - y}{2x}$

Si $y \neq 0$ de la segunda ecuación resulta $\lambda = \dfrac{2y - x}{2y}$

Luego,

$$\frac{2x-3-y}{2x}=\frac{2y-x}{2y}\Rightarrow x^2=y^2+3y$$

Al sustituir este valor en la tercera ecuación se obtiene

$$y^2+3y+y^2=9\Rightarrow 2y^2+3y-9=0\Rightarrow y=-3 \quad \text{ó} \quad y=\frac{3}{2}$$

$$y=-3\Rightarrow x=0 \qquad \text{y} \qquad y=\frac{3}{2}\Rightarrow x^2=\frac{27}{4}\Rightarrow x=-\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{ó} \quad x=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Se obtiene así los puntos $P_1(0,-3)$, $P_2\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$ y $P_3\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$.

b) Si $x=0$ y $y\neq 0$ resulta el sistema $\begin{cases}-3-y=0\\ 2y=2\lambda\, y\\ y^2=9\end{cases}$ cuya única solución es $y=-3$.

c) Si $x\neq 0$ y $y=0$ resulta el sistema $\begin{cases}2x-3=2\lambda\, x\\ -x=0\\ x^2=9\end{cases}$ que no tiene solución.

Por lo tanto, los puntos a estudiar en la frontera son: $P_1(0,-3)$, $P_2\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$ y $P_3\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Las imágenes de los puntos donde pueden ocurrir los valores extremos absolutos vienen dadas por:

$$f(2,1)=-3,\quad f(0,-3)=9,\quad f\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)=9-\frac{27\sqrt{3}}{4}\ ,\quad f\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)=9+\frac{27\sqrt{3}}{4}$$

Se tiene entonces que:

El máximo absoluto es $f\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)=9+\frac{27\sqrt{3}}{4}$ y el mínimo absoluto es $f(2,1)=-3$.

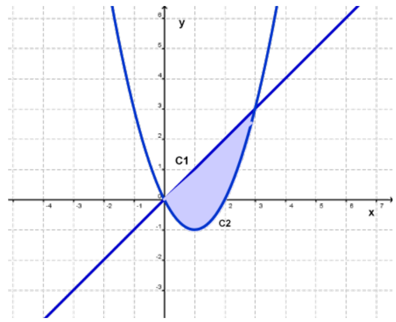
39. Sea f la función definida por $f(x,y)=x^2+y^2+xy+1$, y sea R región del plano acotada por las gráficas de $y=x^2-2x$, $y=x$.

a) Represente gráficamente la región R y determine los puntos de R en los cuales la función f podría alcanzar los valores extremos absolutos.

b) Halle el máximo y el mínimo absoluto de la función f .

Solución:

La región R se muestra en la figura sombreada.



a) **i**) En el interior de la región:

$$f_x(x,y) = 2x + y \quad \text{y} \quad f_y(x,y) = 2y + x$$

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

Observe que el punto $P(0,0)$ no está en el interior de la región, en consecuencia, no hay punto críticos en R.

ii) En la frontera de la región:

Sea C_1 el segmento definido por: $y = x, \quad 0 \le x \le 3$

$$f(x,x) = 3x^2 + 1,\ 0 \le x \le 3$$

$$\frac{d(3x^2+1)}{dx} = 6x \quad \text{y} \quad 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Los puntos a estudiar en C_1 son los extremos del segmento: $P_1(0,0)$ y $P_2(3,3)$.

Sea C_2 la parte de la parábola definida por: $y = x^2 - 2x, \quad 0 \le x \le 3$.

$$f(x, x^2 - 2x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1,\ 0 \le x \le 3$$

$$\frac{d(x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1)}{dx} = 4x^3 - 9x^2 + 6x = x(4x^2 - 9x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{¿por qué?}$$

Los puntos estudiar en C_2 son los extremos de la curva: $P_1(0,0)$ y $P_2(3,3)$.

Por lo tanto, los puntos estudiar en la frontera son: $P_1(0,0)$ y $P_2(3,3)$ y sus imágenes son:

$$f(0,0)=1\,,\quad f(3,3)=28$$

Se tiene entonces que:

El máximo absoluto es $f(3,3)=28$ y el mínimo absoluto es $f(0,0)=1$.

40. El potencial electrostático en cada punto de la región

$$D=\left\{(x\,,y)\in R^2\,/\,0\le x\le 1,\,0\le y\le 1\right\}$$

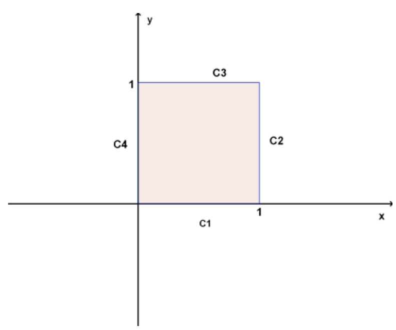
viene dado por

$$V(x\,,y)=48xy-32x^3-24y^2$$

Halle los potenciales máximo y mínimo en la región.

Solución:

La región D es la región sombreada de la figura, limitada por el cuadrado.



i) En el interior de la región:

$$V_x(x\,,y)=48y-96x^2 \quad \text{y} \quad V_y(x\,,y)=48x-48y$$

$$V_x(x\,,y)=V_y(x\,,y)=0\Rightarrow\begin{cases} y-2x^2=0\\ x-y=0\end{cases}$$

$$x=y\Rightarrow x-2x^2=0\Rightarrow x(1-2x)=0\Rightarrow x=0 \quad \text{ó} \quad x=\frac{1}{2}\,,$$

Luego: $x=0\Rightarrow y=0$, $x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{2}$.

Observe que el punto $P\,(0\,,0)$ no está en el interior de la región, en consecuencia, el único punto crítico en el interior es $P_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

ii) En la frontera de la región:

- Sea C_1 el segmento definido por: $y = 0, \quad 0 \le x \le 1$

$$V(x,0) = -32x^3, \; 0 \le x \le 1$$

$$\frac{d\left(-32x^3\right)}{dx} = -96x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Los puntos estudiar en C_1 son los extremos del segmento: $P\,(0,0)$ y $P_2(1,0)$.

- Sea C_2 el segmento definido por: $x = 1, \quad 0 \le y \le 1$

$$V(1,y) = 48y - 24y^2 - 32, \qquad 0 \le y \le 1$$

$$\frac{d\left(48y - 24y^2 - 32\right)}{dy} = 48 - 48y \;\text{ y }\; 48 - 48y = 0 \Rightarrow y = 1$$

Los puntos estudiar en C_2 son los extremos del segmento: $P_2(1,0)$ y $P_3(1,\,1)$.

- Sea C_3 el segmento definido por: $y = 1, \quad 0 \le x \le 1$

$$V(x,1) = 48x - 32x^3 - 24, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$\frac{d\left(48x - 32x^3 - 24\right)}{dx} = 48 - 96x^2 \;\text{ y }\; 48 - 96x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Los puntos estudiar en C_3 son los extremos del segmento: $P_4(0,1)$ y $P_3(1,\,1)$ y $P_5\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$.

- Sea C_4 el segmento definido por: $x = 0, \quad 0 \le y \le 1$

$$V(0,y) = -24y^2, \qquad 0 \le y \le 1$$

$$\frac{d\left(-24y^2\right)}{dy} - 48y \;\text{ y }\; -48y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Los puntos estudiar en C_4 son los extremos del segmento: $P_4(0,1)$ y $P\,(0,0)$.

Al determinar las imágenes de los puntos se tiene que:

$$V\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2,\; V(0,0) = 0,\; V(0,1) = -24,\; V(1,0) = -32,\; V(1,1) = -8,\; V\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right) = 8\left(2\sqrt{2} - 3\right)$$

Se tiene entonces que:

El máximo absoluto es $V\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=2$ y el mínimo absoluto es $V(1,0)=-32$.

41.**a**) Halle el punto del plano de ecuación $3x+2y+z=1$ más próximo al punto $O(0,0,0)$.

b) Determine la distancia del punto $O(0,0,0)$ al plano de ecuación $3x+2y+z=1$.

c) Use esta fórmula de la distancia de un punto a un plano para calcular la parte b) y compare el resultado con el valor obtenido en b).

Solución:

a) Observe que el problema se reduce a hallar el valor mínimo absoluto de la función real de tres variables

$d(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (distancia del punto $P(x,y,z)$ al origen de coordenadas)

sujeta a la restricción $g(x,y,z)=1$ con $g(x,y,z)=3x+2y+z$.

Se debe resolver el sistema $\begin{cases}\nabla d(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)\\ g(x,y,z)=1\end{cases}$

Como

$$\nabla d(x,y,z)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k} \quad (1)$$

y

$$\nabla g(x,y,z)=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

De $\nabla d(x,y,z)=\lambda\,\nabla g(x,y,z)$ y $g(x,y,z)=1$.

De (1) se obtiene el sistema:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=3\lambda\\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=2\lambda\\ \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\lambda\\ 3x+2y+z=1\end{cases}$$

Cuya solución es: $x=\dfrac{3}{14},\quad y=\dfrac{2}{14},\quad z=\dfrac{1}{14}$.

Por lo tanto, el punto más próximo al origen es: $P\left(\dfrac{3}{14},\dfrac{2}{14},\dfrac{1}{14}\right)$.

b) La distancia de *P* al plano es:

$$d\left(\frac{3}{14},\frac{2}{14},\frac{1}{14}\right)=\sqrt{\frac{9}{(14)^2}+\frac{4}{(14)^2}+\frac{1}{(14)^2}}=\sqrt{\frac{14}{(14)^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

c) Observe que si se aplica la fórmula $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+Cz_1+d|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, de distancia de un punto $P(x_1\,,y_1\,,z_1)$ al plano de ecuación $Ax+By+Cz+D=0$

Resulta:

$$d=\frac{|3(0)+2(0)+1(0)-1|}{\sqrt{(3)^2+(2)^2+(1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

42. Aplique multiplicadores de Lagrange para determinar las dimensiones de una caja que tiene forma rectangular, abierta en la parte superior, con un volumen de 108 cm^3 y en la cual se utilice la menor cantidad de material para su construcción.

Solución:

Se supone que si la superficie de la caja rectangular es mínima entonces la cantidad de material utilizado también es mínimo. Por consiguiente para minimizar la cantidad de material utilizado se debe minimizar la superficie de la caja S.

Sean *x* y *y* las dimensiones de la base de la caja y *z* la altura, entonces

$$S(x\,,y\,,z)=xy+2xz+2yz$$

Sujeta a la restricción $V(x\,,y\,,z)=108$ y $V(x\,,y\,,z)=xyz$

Aplicando Lagrange, se debe resolver el sistema

$$\begin{cases}\nabla S(x\,,y\,,z)=\lambda\nabla V(x\,,y\,z)\\ xyz=108\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y+2z=\lambda yz\\ x+2z=\lambda xz\\ 2x+2y=\lambda xy\\ xyz=108\end{cases}$$

Como $x\neq 0,\quad y\neq 0,\quad z\neq 0$ se tiene que

$$\frac{y+2z}{yz}=\frac{x+2z}{xz}=\frac{2x+2y}{xy}=\lambda$$

De $\dfrac{y+2z}{yz}=\dfrac{x+2z}{xz}$ se deduce que

$$xyz+2xz^2=xyz+2yz^2 \Rightarrow \quad xz^2-yz^2=0 \Rightarrow (x-y)z^2=0 \Rightarrow x=y \quad \text{ó} \quad z=0 \Rightarrow x=y \quad (z\neq 0)$$

De $\dfrac{x+2z}{xz}=\dfrac{2x+2y}{xy}$ se deduce que

$$x^2y+2xyz=2x^2z+2xyz \Rightarrow x^2y-2x^2z=0 \Rightarrow x^2(y-2z)=0 \Rightarrow x=0 \quad \text{ó} \quad y=2z$$
$$\Rightarrow y=2z \quad (x\neq 0)$$

Por lo tanto,

$$x=y=2z$$

Sustituyendo estos valores en $xyz=108$ se obtiene

$$2z\cdot 2z\cdot z=108 \Rightarrow 4z^3=108 \Rightarrow z^3=27 \Rightarrow z=3$$

y

$$z=3 \Rightarrow x=y=6$$

En conclusión, las dimensiones de la caja son $x=6$ (largo), $y=6$ (ancho) y $z=3$ (altura).

43. El área de un triángulo y perímetro *p* cuyos lados tiene longitudes "*x*", "*y*" y "*z*" viene dada por

$$A(x,y,z)=\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-y\right)\left(\frac{p}{2}-z\right)}$$

Utilice multiplicadores de Lagrange para demostrar que de todos los triángulos de perímetro *p* el que tiene área máxima es el triángulo equilátero.
Solución:

El problema se reduce a hallar el máximo absoluto de la función

$$A(x,y,z)=\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-y\right)\left(\frac{p}{2}-z\right)}$$

Sujeta a la restricción $x+y+z=p$ con $g(x,y,z)=x+y+z$.

Para resolver el sistema por Lagrange, se debe hallar la solución del sistema

$$\begin{cases} \nabla A(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,yz) \\ xyz = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-y\right)\left(\frac{p}{2}-z\right)}{2\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-y\right)\left(\frac{p}{2}-z\right)}} = \lambda \\ \dfrac{-\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-z\right)}{2\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-y\right)\left(\frac{p}{2}-z\right)}} = \lambda \\ \dfrac{-\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-y\right)}{2\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-y\right)\left(\frac{p}{2}-z\right)}} = \lambda \\ x+y+z = p \end{cases}$$

Del cual se tiene que

$$-\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-y\right)\left(\frac{p}{2}-z\right) = -\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-z\right) = -\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-y\right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{p}{2}-y\right)\left(\frac{p}{2}-z\right) = \left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-z\right) = \left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-y\right)$$

Como $x \neq \frac{p}{2}, \quad y \neq \frac{p}{2}, \quad z \neq \frac{p}{2}$

De $\left(\frac{p}{2}-y\right)\left(\frac{p}{2}-z\right) = \left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-z\right)$ se deduce que: $\frac{p}{2}-y = \frac{p}{2}-z \Leftrightarrow y = z$

De $\left(\frac{p}{2}-y\right)\left(\frac{p}{2}-z\right) = \left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-y\right)$ se deduce que: $\frac{p}{2}-z = \frac{p}{2}-x \Leftrightarrow z = x$

Por lo tanto,

$$x = y = z$$

En consecuencia, el triángulo es equilátero.

Problemas propuestos

En los problemas del 1 al 6 determine el dominio de la función *f*, y encuentre sus derivadas parciales.

1. $f(x,y)=x\ln(xy)$ **2.** $f(x,y)=\left(x^2+2y^4+\dfrac{x}{y}\right)^3$ **3.** $f(x,y)=ye^{xy}$

4. $f(x,y,z)=\sqrt[3]{x^2+2y^2+z}$ **5.** $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ **6.** $f(x,y,z)=\arctan\left(\dfrac{xz}{y}\right)$

Respuestas: **1)** $\mathrm{Dom}_f=\{(x,y)\in R^2\,/\,xy>0\}$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\ln(xy)+1$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x}{y}$

2) $\mathrm{Dom}_f=\{(x,y)\in R^2\,/\,y\neq 0\}$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}=3\left(x^2+2y^4+\dfrac{x}{y}\right)^2\left(2x+\dfrac{1}{y}\right)$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}=3\left(x^2+2y^4+\dfrac{x}{y}\right)^2\left(8y^3-\dfrac{x}{y^2}\right)$

3) $\mathrm{Dom}_f=R^2$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y^2e^{xy}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^{xy}(1+xy)$

4) $\mathrm{Dom}_f=R^3$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{2x}{3}\left(x^2+2y^2+z\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{4y}{3}\left(x^2+2y^2+z\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{1}{3}\left(x^2+2y^2+z\right)^{-\frac{2}{3}}$

5) $\mathrm{Dom}_f=R^3-\{(0,0,0)\}$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-\dfrac{2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{2y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial z}=-\dfrac{2z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$

6) $\mathrm{Dom}_f=\{(x,y,z)\in R^3\,/\,y\neq 0\}$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{z}{y\left(1+\left(\dfrac{xz}{y}\right)^2\right)}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{xz}{y^2\left(1+\left(\dfrac{xz}{y}\right)^2\right)}$; $\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{x}{y\left(1+\left(\dfrac{xz}{y}\right)^2\right)}$

7. Si $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+4y^2-z^2}$ encuentre $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)$.

Respuesta: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)=2$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)=-\dfrac{1}{2}$

8. Si $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2+1\right)$, pruebe que: $y\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$.

En los problemas del 9 al 12 verifique que las derivadas de segundo orden cruzadas son iguales.

9. $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2+1\right)$ **10.** $f(x,y)=e^y\cos x$

11. $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ **12.** $f(x,y)=\arctan\left(x^2+y^2\right)$

13. La energía cinética k de un cuerpo de masa m y velocidad v es $k=\frac{1}{2}mv^2$. Demuestre que $\frac{\partial k}{\partial m}\frac{\partial^2 k}{\partial v^2}=k$.

14. Una función real de dos variables $w=f\left(x,y\right)$ con segundas derivadas parciales continuas que satisfaga la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$ se llama función armónica. Muestre que la función definida por $w\left(x,y\right)=x^3-3xy^2$ es armónica.

15. Cuando dos conductores que tienen resistencias de R_1 ohmios y R_2 ohmios, se conectan en paralelo, su resistencia combinada R en ohmios es $R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$. Demuestre que:

a) $\frac{\partial R}{\partial R_1}+\frac{\partial R}{\partial R_2}=\frac{R_1^2+R_2^2}{\left(R_1+R_2\right)^2}$ **b)** $\frac{\partial^2 R}{\partial R_1\partial R_2}+\frac{\partial^2 R}{\partial R_2\partial R_1}=\frac{4R_1R_2}{\left(R_1+R_2\right)^3}$

16. Encuentre las ecuaciones paramétricas en el punto $P(2,1,5)$ de la recta tangente a la curva de intersección del paraboloide de ecuación $z=x^2+y^2$ con el plano de ecuación:

a) $x=2$ **b**) $y=1$.

Respuesta: **a**) $\begin{cases} x=2 \\ y=\lambda \quad , \quad \lambda\in R \\ z=2\lambda+3 \end{cases}$ **b**) $\begin{cases} x=\beta \\ y=1 \quad , \quad \beta\in R \\ z=4\beta-3 \end{cases}$

En los problemas de 17 y 18 halle por definición la derivada dirección de f y en la dirección del vector $\vec{v}$ dado.

17. $f\left(x,y\right)=3x-2y$, $\vec{v}=-\vec{i}-\vec{j}$ **18**. $f\left(x,y\right)=xy$, $\vec{v}=2\vec{i}-5\vec{j}$

Respuestas: **17**) $D_{\vec{v}}f(x,y)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ **18**) $D_{\vec{v}}f(x,y)=\frac{2y}{\sqrt{29}}-\frac{5x}{\sqrt{29}}$

19. Halle por definición la derivada dirección de f definida por $f\left(x,y\right)=\frac{x}{y}$ en $(6,-2)$ en la dirección del vector $\vec{v}=-\vec{i}+3\vec{j}$ dado.

Respuesta: $D_{\vec{v}}f(6,-2)=-\frac{4}{\sqrt{10}}$

20. Sea $f\left(x,y\right)=\begin{cases} \frac{xy^2-yx}{x^2+y^2} & \text{si} \quad \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right) \\ 0 & \text{si} \quad \left(x,y\right)=\left(0,0\right) \end{cases}$

a) Halle $\frac{\partial f\left(0,0\right)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f\left(0,0\right)}{\partial y}$

b) ¿En cuál dirección existe $Df_{\vec{v}}(0,0)$?

c) ¿Es la función *f* diferenciable en $(0,0)$?

Respuesta: **a**) $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$; $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$ **b**) Sólo existe en dirección de los ejes de coordenadas. **c**) No es diferenciable en $(0,0)$.

21. Halle la derivada direccional del campo escalar *f* definido por $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ en $(1,1,0)$ en la dirección de $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

Respuesta: $D_{\vec{v}}f(1,1,0)=\dfrac{-2}{\sqrt{6}}$

22. Halle la derivada direccional del campo escalar *f* definido por $f(x,y,z)=z\,\text{sen}\,y^3\cos\left(x^5+\tan y^3\right)$ en $\left(0,\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{4}},7\right)$ la dirección de $\vec{v}=2\vec{k}$.

Respuesta: $D_{\vec{v}}f\left(0,\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{4}},7\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(1)$

23. Halle la derivada direccional del campo escalar *f* definido por $f(x,y)=\text{sen}\left(x^2+y^2\right)$ en $P(1,1)$ la dirección del vector que va del punto *P* al punto $Q(3,2)$.

Respuesta: $D_{\overrightarrow{PQ}}f(1,1)=\dfrac{6}{\sqrt{5}}\cos(2)$

24. Dada la función real de dos variables definida por $f(x,y)=x^2+\text{sen}(xy)$, determine las direcciones donde se verifica $D_{\vec{u}}f(1,0)=1$.

Respuesta: En la dirección de los vectores: $\overrightarrow{u_1}=\vec{j}$ y $\overrightarrow{u_2}=\dfrac{4}{5}\vec{i}-\dfrac{3}{5}\vec{j}$

25. Sea $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$, determine

a) La máxima razón de cambio en el punto $(2,1)$.

b) La dirección en que ocurre.

Respuesta: **a**) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **b**) En la dirección del vector $\dfrac{4}{5}\vec{i}+\dfrac{2}{5}\vec{j}$

26. La temperatura en un punto arbitrario de una placa rectangular en el plano xy está dada por la fórmula $T=50\left(x^2-y^2\right)$ (en grados centígrados).

a) Halle $D_\theta T(4,3)$, donde θ es el ángulo que determina la dirección dada con el eje *x*.

b) Determine $\tan\theta$ cuando $D_\theta T(4,3)=0$.

c) Determine la pendiente de la recta tangente a la curva $T=$constante, cuando pasa por ese punto.

Respuesta: **a)** $D_\theta T(4,3) = 400\cos\theta - 300\operatorname{sen}\theta$ **b)** $\tan\theta = \frac{4}{3}$ **c)** $m = \frac{4}{3}$

27. Sea *g* la función de dos variables definidas por $g(x, y) = x^2 y$. Calcule la derivada direccional de *g* en el punto $P(1,2)$.

a) En la dirección de la semirrecta de ecuación $(x, y) = (1,2) + \lambda(4,3)$ con $\lambda \geq 0$.
b) En la dirección de la semirrecta de ecuación $(x, y) = (1,2) + \lambda(4,3)$ con $\lambda \leq 0$.

Respuestas: **a**) $\frac{19}{5}$ **b**) $-\frac{19}{5}$

28. Sea *g* una función real diferenciable de una variable. Determine: $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ si:

$$F(x, y) = \arctan\left(x^2 + g^2\left(x\operatorname{sen}(xy)\right)\right)$$

Respuesta: $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(x^2 + g^2\ x\operatorname{sen}(xy)\right)^2} \cdot \left(2x + 2g\left(x\operatorname{sen}(xy)\right) g'\left(x\operatorname{sen}(xy)\right)\left(sen(xy) + xy\cos(xy)\right)\right)$;

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(x^2 + g^2\ x\operatorname{sen}(xy)\right)^2}\left(2g\left(x\operatorname{sen}(xy)\right) g'\left(x\operatorname{sen}(xy)\right)\left(x^2\ \cos(xy)\right)\right)$

29. Sea $w = f(u, v)$, si *f* es una función de clase C^2, con $u = xy$ y $v = \frac{x}{y}$, halle $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Respuesta: $\frac{\partial w}{\partial x} = y\ f_u + \frac{1}{y}\ f_v$; $\frac{\partial w}{\partial y} = x\ f_u - \frac{x}{y^2}\ f_v$; $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = y^2\ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

30. Sea $y = \phi(x, t) = \cos x \cos t$. Pruebe que ϕ satisface la ecuación de la onda: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$

31. Si ϕ es una función real diferenciable. Pruebe que $f(x, y) = x^2 \phi\left(x^4 - y^2\right)$ satisface la ecuación $x^3\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{2x^6}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2\ f(x, y)$.

32. Sea $w = f(x, y, z) = e^{xy}\cos z$, con $x = tu$, $y = \operatorname{sen}(tu)$ y $z = u^2$. Demuestre que $t\frac{\partial w}{\partial t} - u\frac{\partial w}{\partial u} = 2ze^{xy}\operatorname{sen} z$.

33. Sea $F(x, y, z) = x^\alpha f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ demuestre que si *f* es una función de clase C^1 y α es un número real entonces $x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = \alpha F(x, y, z)$.

34. Sea *f* y *g* funciones reales y derivables. Demuestre que la función $z = f(xy) + g\left(\frac{x}{y}\right)$ satisface la ecuación diferencial $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

35. Sea $z = f(x, y)$ una función real diferenciable, con $x = s + t$ y $y = s - t$. Demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$$

36. Un punto se mueve sobre la superficie de ecuación $z = x^2 + 2y^2 - 3x + y$ de manera que $\frac{dx}{dt} = 3$ y $\frac{dy}{dt} = 2$. Halle la variación de z con respecto al tiempo cuando $x = 1$ y $y = 4$.

Respuesta: $\frac{dz}{dt}\Big|_{\substack{x=1\\y=4}} = 31$

37. Halle la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie de ecuación $xe^{yz} = 1$ en el punto $(1, 0, 5)$.

Respuesta: $x + 5y = 1$; $x - 1 = \frac{y}{5}$, $z = 5$

38. Halle la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la gráfica de $z = x^2 + 2y^3$ en el punto $A(1, 1, 3)$.

Respuesta: $2x + 6y - z = 5$; $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 6\lambda \quad \lambda \in \mathrm{R} \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$

39. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + xy$ que sea perpendicular a los planos de ecuaciones $x + y - z = 3$ y $2x - y + z = 4$.

Respuesta: $y + z = 1$

40. Encuentre los puntos del hiperboloide de ecuación $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ en los que el plano tangente es paralelo al plano de ecuación $4x - 2y + 4z = 5$.

Respuesta: $P_1\left(8\sqrt{\frac{2}{5}}, 2\sqrt{\frac{2}{5}}, -2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ y $P_2\left(-8\sqrt{\frac{2}{5}}, -2\sqrt{\frac{2}{5}}, +2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

41. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + xy$ que sea perpendicular a la recta L de ecuación $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 - 3t, \quad t \in R. \\ z = -3t \end{cases}$

Respuesta: $y+z=1$

42. Dada la superficie de ecuación $2x^2+y^2+z^2=4$, halle las ecuaciones de todos los planos tangentes que son paralelos al plano de ecuación $x+y+z=4$.

Respuesta: $x+y+z=\sqrt{10}$; $x+y+z=-\sqrt{10}$

43. Halle el valor de la constante a de forma tal que el plano tangente a la superficie de ecuación $x^2+a^2y^2-z^2=1$ en el punto $P\left(1,\dfrac{1}{a},1\right)$ sea paralelo al plano π de ecuación $x+4y-z=0$.

Respuesta: $a=4$

44. Pruebe que toda recta normal a la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=R^2$ pasa por el centro de la esfera.

45. Demuestre que toda recta normal al cono de ecuación $z^2=3x^2+3y^2$ interseca al eje *z*.

46. Indique y clasifique los puntos críticos de la función real de dos variables definida por $f(x,y)=3x^2y+x^2-6x-3y-2$.

Respuesta : No hay máximo relativo ni mínimo relativo. Los puntos $\left(1,\dfrac{2}{3}\right)$ y $\left(-1,-\dfrac{4}{3}\right)$ son puntos de silla.

47. Indique los puntos críticos y halle los valores máximo y mínimo absoluto de la función real de dos variables definida por

$$f(x,y)=xy-x+1$$

sobre la región triangular de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(1,2)$.

Respuesta: Puntos críticos: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$, $P_3\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $P_4(1,2)$ y $P_5\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$; máximo absoluto es $f(1,2)=2$; mínimo absoluto es $f\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$

48. Halle los valores extremos absolutos de la función definida por $f(x,y)=xy(2-x-y)$, en la región limitada por el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$ y $(2,2)$.

Respuesta: Máximo absoluto es $f\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{8}{27}$; el mínimo absoluto es $f(2,2)=-8$

49. Halle los valores extremos absolutos de la función definida por $f(x,y)=xy(1-x-y)$, en la región limitada por el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$, y $(2,2)$.

Respuesta: Máximo absoluto es $f\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{27}$; el mínimo absoluto es $f(2,2)=-12$

50. Sea f una función real de dos variables definida por $f(x,y)=x^2+y^2$, halle los valores máximo y mínimo absoluto de la función sobre la región R, donde $R=\{(x,y)\in R^2:(x-3)^2+(y-3)^2\leq 6\}$.

Respuesta: Máximo absoluto es $f\left(3+\sqrt{3},3+\sqrt{3}\right)=24+12\sqrt{3}$; el mínimo absoluto es $f\left(3-\sqrt{3},3-\sqrt{3}\right)=24-12\sqrt{3}$.

51. Se desea construir un área de descanso para gandoleros en una autopista. Esta área debe ser rectangular con una medida de 10.000m^2 y debe estar cercada en los tres lados no adyacentes a la autopista. ¿Cuál es la cantidad mínima de cercado que será necesaria para completar el trabajo?

Respuesta: $f\left(50\sqrt{2},100\sqrt{2}\right)=200\sqrt{2}\,m$

52. **a**) Determine los puntos de la superficie de ecuación $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=42$ más cercanos y más alejados del origen.

b) Represente gráficamente la superficie de ecuación $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=42$ y verifique gráficamente el resultado obtenido en a)

Respuesta: **a**) El punto de la superficie más cercano al origen es $P_1\left(-1,-2,-3\right)$, y el punto de la superficie más alejado del origen es $P_2\left(3,6,9\right)$.

53. La altura en kilómetros de cierta región R está medida por la función $f\left(x,y\right)=e^{-xy}$, donde *x* e *y* están medidos en kilómetros. Halle los puntos donde la región $R=\{(x,y)\in R^2/\,x^2+4y^2\leq 1\}$ alcanza su punto más alto y su punto más bajo.

Respuesta: Los puntos $P_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ y $P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ tienen la mayor altura, y los puntos de la $P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ y $P_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ tienen la altura mínima.

54. Halle el mínimo de $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, si (x,y,z) está en la recta de intersección de los planos de ecuaciones $2x+y-3z=4$, y $x-y+2z=6$

Respuesta: Mínimo $f\left(\frac{212}{59},-\frac{50}{59},\frac{46}{59}\right)=\frac{49560}{3481}$

55. Halle las dimensiones de una caja rectangular, sin considerar la tapa superior, que tiene volumen máximo si el área de la superficie es 12.

Respuesta: 2, 2, 1.

COORDENADAS POLARES

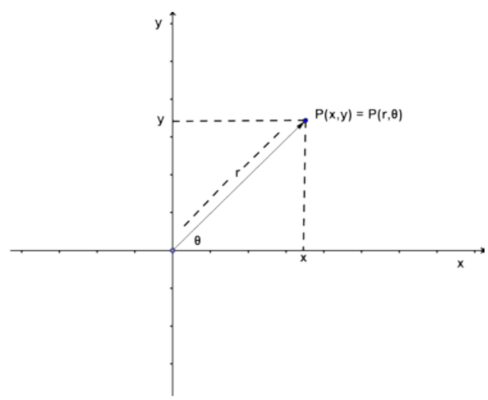
Definiciones, propiedades y teoremas importantes

Definición 4.1: Sea O un punto fijo del plano llamado polo y un rayo inicial desde O, las coordenadas polares de un punto P del plano son (r, θ) donde *r* es la distancia dirigida de O a P y θ da el ángulo dirigido del rayo inicial al rayo OP. θ se considera positivo cuando se mide en sentido contrario a las agujas del reloj y negativo cuando se mide en el sentido de las agujas del reloj. Los puntos (r, θ) y $(-r, \theta)$ están sobre la misma recta que pasa por O, a la misma distancia $|r|$ de O pero en lados opuestos de O. El punto $(0, \theta)$ representa el polo u origen.

Teorema 4.1: Las coordenadas polares (r, θ) de un punto P en el plano están relacionadas con las coordenadas rectangulares (x, y) de ese punto como sigue:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$



Teorema 4.2: Sea f una función real continua definida por $r = f(\theta)$, si $f(\theta) \geq 0$ en $[a, b]$ con $0 \leq a \leq \theta \leq b \leq 2\pi$, entonces el área *A* de la región acotada por las gráficas de $r = f(\theta)$, $\theta = a$ y $\theta = b$ es

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b [f(\theta)]^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_a^b r^2\, d\theta$$

Teorema 4.3: Sean *f* y *g* funciones reales continuas definidas por $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$, si $f(\theta) \geq g(\theta) \geq 0$ en $[a, b]$ con $0 \leq a \leq \theta \leq b \leq 2\pi$, y *R* es la región acotada por las gráficas de $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$, $\theta = a$ y $\theta = b$ el área de la región *R* es

$$A = \frac{1}{2}\left(\int_a^b [f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2\right) d\theta$$

Teorema 4.4: Si *C* es la gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ y si *f ′* es continua en $[a, b]$, entonces la longitud *L* de *C* es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Problemas resueltos

1. Determine la distancia entre los puntos cuyas coordenadas polares son $\left(3,\frac{\pi}{4}\right)$ y $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$

Solución:

Las coordenadas cartesianas del punto $\left(3,\frac{\pi}{4}\right)$ vienen dadas por:

$$x=3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad y=3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Las coordenadas cartesianas de punto $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ vienen dadas por:

$$x=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=1 \quad \text{y} \quad y=2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$

Luego, la distancia *d*, entre los puntos dados es:

$$d=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{2}-3\sqrt{2}+1+\frac{9}{2}-3\sqrt{6}+3}=\sqrt{13-3\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}$$

2. Decida si los pares indicados de coordenadas polares representan el mismo punto.

a) $\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right)$ y $\left(\sqrt{3},\frac{5\pi}{3}\right)$ **b**) $\left(\sqrt{5},-\frac{11\pi}{6}\right)$ y $\left(\sqrt{5},\frac{\pi}{6}\right)$

Solución:

a) No, ya que $\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right)$ está en el primer cuadrante y $\left(\sqrt{3},\frac{5\pi}{3}\right)$ está en el cuarto cuadrante.

b) Si, $\left(\sqrt{5},-\frac{11\pi}{6}\right)$ y $\left(\sqrt{5},\frac{\pi}{6}\right)$, ya que $r=\sqrt{3}$ es el mismo en ambos puntos y los ángulos tienen los mismos lados terminales a pues $\frac{\pi}{6}=2\pi-\frac{11\pi}{6}$.

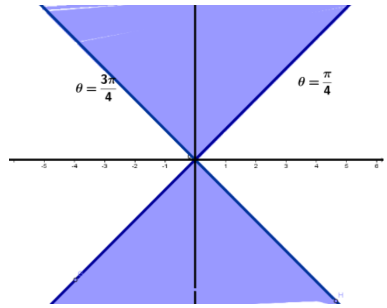
3. Represente gráficamente la curva ó la región del plano cuyas coordenadas polares satisfacen las relaciones siguientes:

a) $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$ **b)** $1 \le r \le 2$ y $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

c) $\left\{(r,\theta)/ \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right\} \cap \{(r,\theta)/ \quad 2 < r < 3\}$ **d)** $\theta = \arctan a \quad (a > 0)$

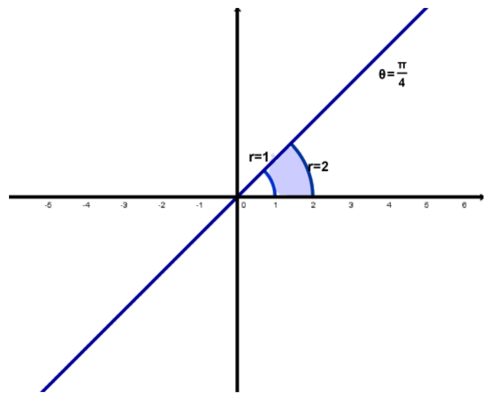
Solución:

a) $$\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$$



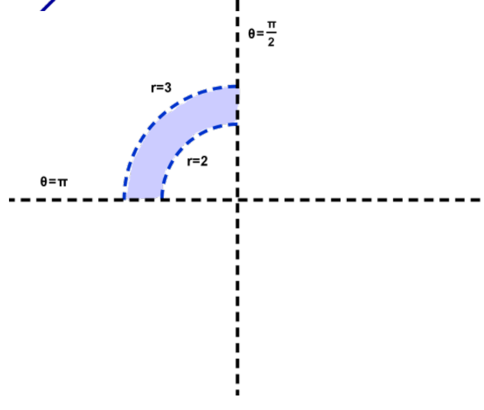
Representa la región del plano limitadas por las rectas que pasan por el origen y forman ángulos con el eje polar de $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$ radianes respectivamente.

b) $1 \le r \le 2$ y $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$



Representa el sector circular limitada por el eje polar, por la recta que pasa por el polo y forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje polar, y por las circunferencias con centro el polo y radios 1 y 2 respectivamente.

c) $\left\{(r,\theta)/ \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right\} \cap \{(r,\theta)/ \quad 2 < r < 3\}$



Representa la región abierta del plano limitada por las rectas que pasan por el origen y forman ángulos de $\frac{\pi}{2}$ y π radianes respectivamente con el eje polar, y por las circunferencias con centro el polo y radios 2 y 3 respectivamente.

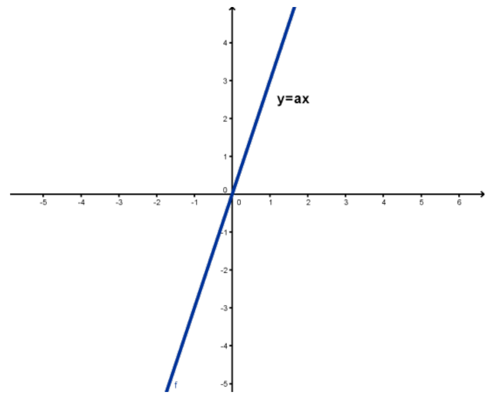
d) $\theta = \arctan a \quad (a > 0) \Rightarrow \tan\theta = a \Rightarrow \dfrac{sen\,\theta}{\cos\theta} = a$ y

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ya que $a > 0$.

y

$$\operatorname{sen}\theta = a\cos\theta \Rightarrow \operatorname{rsen}\theta = ar\cos\theta \Rightarrow y = ax$$

Luego, la ecuación dada representa la recta de pendiente *a* que pasa por el origen, como se muestra en la figura.



4. Determine una ecuación polar para la curva representada por la ecuación cartesiana $x^2 - y^2 = 4$.

Solución:

Al sustituir $x = r\,cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ en la ecuación $x^2 - y^2 = 4$ resulta,

$$x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta = 4 \Rightarrow r^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) = 4 \Rightarrow r^2\cos 2\theta = 4$$

5. Determine una ecuación polar para la curva representada por la ecuación cartesiana $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

Solución:

$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow r^2 - 2r\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow$$
$$r(r - 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{ó} \quad r = 2\operatorname{sen}\theta, \quad \theta = 2\mathrm{k}\pi, \quad \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$$

Como la solución $r = 0$ queda contenida en $r = 2\operatorname{sen}\theta$, se tiene que una ecuación es

$$r = 2\operatorname{sen}\theta$$

6. Considere la ecuación polar $r = a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta$, $a,b > 0$.

a) Halle la ecuación cartesiana y verifique que la ecuación dada representa una circunferencia.

b) Halle en coordenadas cartesianas el centro y radio de la circunferencia.

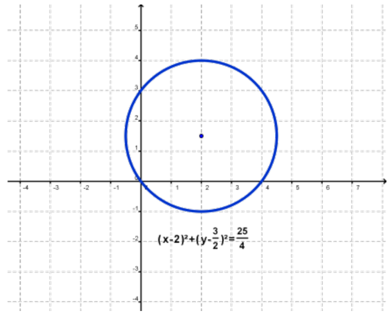
c) Si $b = 4$ y $a = 3$ represente gráficamente la circunferencia.

Solución:

a) $$r = a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{ay}{r} + \frac{bx}{r} \Rightarrow x^2 + y^2 = ay + bx \Rightarrow x^2 + y^2 - ay - bx = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \quad \text{(Ecuación de una circunferencia)}$$

b) El centro es $C\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2}\right)$ y el radio es $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$



c) Si $b=4$ y $a=3$ resulta la circunferencia de ecuación

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

7. Dada la curva de ecuación polar $r=4\operatorname{sen}\theta$, halle:

a) Las ecuaciones paramétricas.

b) La ecuación cartesiana.

Solución:

a) Unas ecuaciones parámetricas son $x=4\operatorname{sen}\theta\cos\theta$, $y=4\operatorname{sen}^2\theta$.

b) $r=4\operatorname{sen}\theta \Rightarrow r^2=4r\operatorname{sen}\theta \Rightarrow x^2+y^2=4y \Rightarrow x^2+y^2-4y=0 \Rightarrow x^2+(y-2)^2=4$

8. Dadas las curvas de ecuaciones polares $r_1=3$ y $r_2=6\operatorname{sen}\theta$, halle:

a) Grafique ambas curvas en un mismo sistema de coordenadas.

b) Determine los puntos de intersección de ambas curvas.

c) Determine el área de la región del plano que es interior a ambas curvas.

d) Determine la longitud del arco de curva de r_2 que está en el segundo cuadrante y es exterior a r_1.

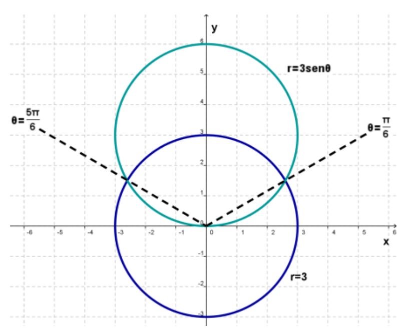
Solución:

a) La gráfica se muestra en la figura. Observe que las ecuaciones corresponden a dos circunferencias (ejercicio 6).

b)

$$6\operatorname{sen}\theta=3 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6} \quad \text{ó} \quad \theta=\frac{5\pi}{6}$$

Y los puntos de intersección son $P_1\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$ y $P_2\left(3,\frac{5\pi}{6}\right)$.



c) El área de la región del plano interior a ambas curvas se obtiene mediante la integral:

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2}\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (6\text{sen}\,\theta)^{2} d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (3)^2\, d\theta\right] = \left(3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right) + 3\pi = 6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

d) $$L = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{(6\,\text{sen}\theta)^2 + (6\cos\theta)^2}\, d\theta = 6\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} d\theta = 6\left[\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right] = 2\pi$$

9. Dada la ecuación $r = \dfrac{4}{3+\sqrt{5}\,\text{sen}\,\theta}$ en coordenadas polares, halle la ecuación en coordenadas rectangulares, identifique la curva y grafíquela.

Solución:

$$r = \frac{4}{3+\sqrt{5}\,\text{sen}\,\theta} \Rightarrow 3r + \sqrt{5}\, r\,\text{sen}\,\theta = 4 \qquad (1)$$

Al sustituir $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $r\,\text{sen}\,\theta = y$ en (1) se obtiene la siguiente ecuación en coordenadas cartesianas:

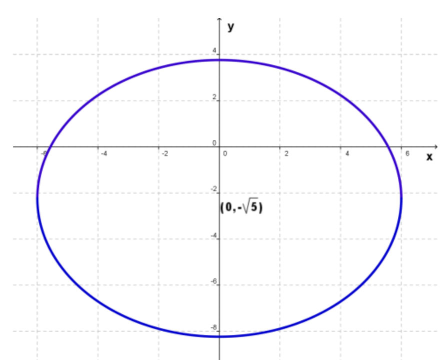
$$3\sqrt{x^2 + y^2} = 4 - \sqrt{5}y$$

$$3\sqrt{x^2 + y^2} = 4 - \sqrt{5}y \Rightarrow 9\left(x^2 + y^2\right) = 16 - 8\sqrt{5}y + 5y^2 \qquad (2)$$

Al realizar las operaciones indicadas y completar cuadrados se obtiene que la ecuación (2) se obtiene

$$\frac{x^2}{4} + \frac{\left(y+\sqrt{5}\right)^2}{9} = 1$$

que corresponde a la ecuación de la elipse que se muestra en la figura, de centro $C\left(0, -\sqrt{5}\right)$.



10. Dada la ecuación $r = \dfrac{1}{2 - 2\text{sen}\,\theta}$ en coordenadas polares, halle la ecuación correspondiente en coordenadas rectangulares, identifique la curva y grafíquela.

Solución:

$$r = \frac{1}{2 - 2\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow 2r - 2r\operatorname{sen}\theta = 1 \quad (1)$$

Al sustituir $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $r\operatorname{sen}\theta = y$ en (1) se obtiene la siguiente ecuación en coordenadas cartesianas:

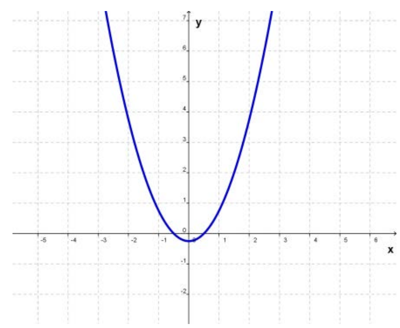
$$2\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + 2y$$

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + 2y \Rightarrow 4\left(x^2 + y^2\right) = 1 + 4y + 4y^2 \quad (2)$$

Al realizar las operaciones indicadas y completar cuadrados que la ecuación (2) es equivalente a la ecuación:

$$y = x^2 - \frac{1}{4}$$

que cual corresponde a la ecuación de la parábola que se muestra en la figura



11. Dadas las ecuaciones en coordenadas polares $r_1 = \operatorname{sen}\theta$ y $r_2 = \cos\theta$.

a) Grafique las curvas definidas por las ecuaciones anteriores (sin pasar a coordenadas rectangulares).

b) Halle los puntos de intersección.

c) Halle el área de la región del plano que es interior a ambas curvas.

d) Calcule la longitud del arco de curva de r_1 que es exterior a r_2.

e) Calcule la pendiente de la recta tangente a r_1 en el punto del primer cuadrante que es intersección de ambas curvas.

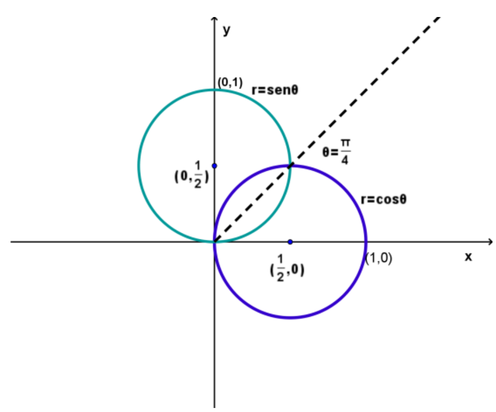
Solución:

a) Las gráficas se muestran en la figura.

b) Observe que r_1 y r_2 se obtienen para valores de θ: $0 \le \theta \le \pi$. Luego considerando valores negativos de r_2

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Y un punto de intersección es $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.



No obstante, existe otro punto de intersección que no se obtiene analíticamente, el origen, ya que $r_1 = 0$ para $\theta = 0$ y $r_2 = 0$ para $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

c) El área de la región del plano interior a ambas curvas es igual a:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2\theta)\, d\theta + \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

d) La longitud del arco de curva de r_1 que es exterior a r_2 se obtiene mediante la integral:

$$L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}\, d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

Nota: La longitud *L* pudo calcularse directamente ¿cómo?

e) Unas ecuaciones paramétricas de r_1 son:

$$\begin{cases} x = r_1 \cos\theta \\ y = r_1 \operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ y = \operatorname{sen}^2\theta \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \\ y = \operatorname{sen}^2\theta \end{cases}$$

La pendiente de la recta tangente a $r_1 = \operatorname{sen}\theta$ en el punto $P(r, \theta)$ es:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\cos 2\theta}$$

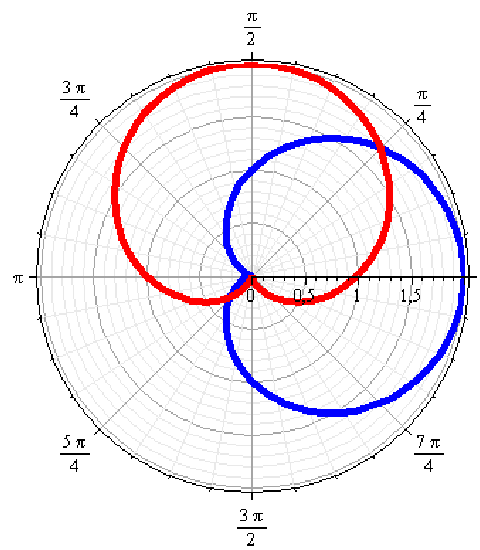
Luego, en $P_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ la pendiente *m* no está definida, por lo tanto, en este punto la recta tangente es vertical, como se puede apreciar en la gráfica.

12. Dadas las ecuaciones en coordenadas polares $r_1 = 1 + \operatorname{sen}\theta$ y $r_2 = 1 + \cos\theta$.

a) Grafique las curvas definidas por las ecuaciones anteriores.
b) Halle los puntos de intersección.
c) Halle el área de la región del plano interior que está en el primer cuadrante que es interior a r_1 y exterior a r_2.
d) Plantee la integral que da la longitud de la parte de r_1 exterior a r_2.

Solución:

a) Las curvas $r_1 = 1 + \operatorname{sen}\theta$ y $r_2 = 1 + \cos\theta$ representan cardiodes de eje *y* y eje *x* respectivamente, su gráfica se muestra en la figura.



b) Observe que r_1 y r_2 se obtienen para valores de θ : $0 \le \theta \le 2\pi$, luego

$$1 + \operatorname{sen}\theta = 1 + \cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{ó} \quad \theta = \frac{5\pi}{4}$$

Y dos puntos de intersección son

$$P_1\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \text{ y } P_2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$$

No obstante, existe otro punto de intersección que no se obtiene analíticamente, el origen, ya que $r_1 = 0$ para $\theta = \frac{3\pi}{2}$ y $r_2 = 0$ para $\theta = \pi$.

c) El área de la región del plano que está en el primer cuadrante que es interior a r_1 y exterior a r_2 viene dada por:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(1 + \operatorname{sen}\theta)^2 - (1 + \cos\theta)^2\right] d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[2\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta - \cos(2\theta)\right] d\theta = \sqrt{2} - \frac{3}{4}$$

d) La longitud de la parte de r_1 exterior a r_2 se obtiene mediante la integral:

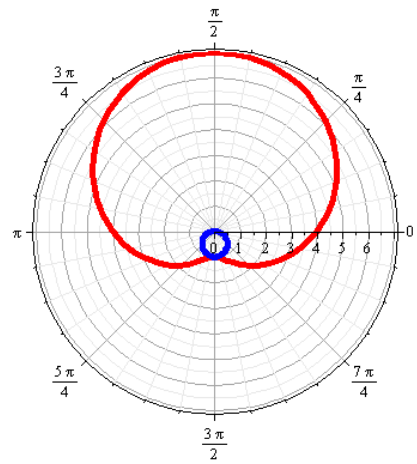
$$L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sqrt{(1 + \operatorname{sen}\theta)^2 + \cos^2\theta}\, d\theta$$

13. Dadas las ecuaciones en coordenadas polares $r_1 = 4 + 3\operatorname{sen}\theta$ y $r_2 = -\operatorname{sen}\theta$.

a) Grafique las curvas definidas por las ecuaciones anteriores (sin pasar a coordenadas rectangulares).
b) Halle los puntos de intersección.
c) Halle el área de la región del plano interior r_1 y exterior a r_2 que está en el tercer cuadrante.
d) Halle una ecuación en coordenadas cartesianas de la curva descrita por r_2.

Solución:

a) r_1 representa una cardiode con rizo en el eje y y r_2 una circunferencia. La gráfica se muestra en la figura.



b) Observe que r_1 se obtiene al variar: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, mientras que r_2 se obtiene al variar: $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, luego

$$4 + 3\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = -1 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$$

Y el punto de intersección es $P_1\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$.

c) El área de la región del plano interior r_1 y exterior a r_2 que está en el tercer cuadrante es igual a:

$$A = \frac{1}{2}\left[\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (4 + 3\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (-\operatorname{sen}\theta)^2 \, d\theta\right] = 5\pi - 12$$

d) Se tiene que:

$$r = -\operatorname{sen}\theta \Rightarrow r^2 = -r\operatorname{sen}\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = -y \Rightarrow x^2 + y^2 + y = 0 \Rightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Luego una ecuación cartesiana de la curva descrita por r_2 es $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, la cual corresponde a la ecuación de una circunferencia de centro $C\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{1}{2}$.

Dadas las ecuaciones en coordenadas polares $r = 4\operatorname{sen}\,\theta$, $\tan\theta = 1$ y $\tan\theta = -1$

a) Grafique las curvas definidas por las ecuaciones anteriores.

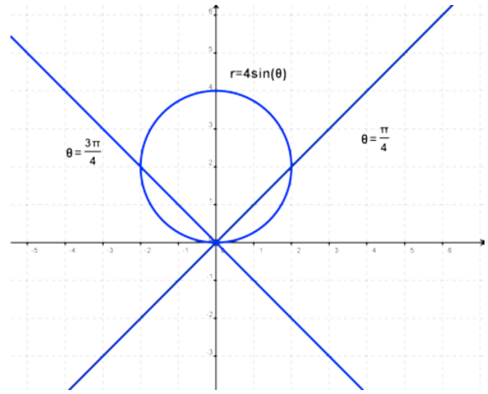
b) Halle los puntos de intersección.

c) Halle el área de la región del plano interior limitada por las tres curvas

d) Calcule la integral que da la longitud del arco de curva de r que está comprendida entre el eje polar y la recta de ecuación $\tan\theta = 1$.

Solución:

a) $\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$ y $\tan\theta = -1 \Rightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{4}$, $r = 4\operatorname{sen}\theta$ es la ecuación de una circunferencia. Las gráficas se muestran en la figura.



b) $\theta = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow r = 4\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ y $\theta = \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow r = 4\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

Y los puntos de intersección son $P_1\left(2\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ y $P_2\left(2\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

c) El área de la región del plano interior limitada por las tres curvas

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 16sen^2\theta\, d\theta =$$

$$8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\theta)\, d\theta = 8\left(\theta - \frac{sen\, 2\theta}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 8\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 8\cdot\frac{1}{2} = 8\cdot\frac{\pi}{4} + 4 = 2\pi + 4$$

d) La longitud del arco de curva de *r* que está comprendida entre el eje polar y la recta de ecuación $\tan\theta = 1$.

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{16sen^2\theta + 16\cos^2\theta}\, d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = 4\cdot\frac{\pi}{4} = \pi$$

14. Dada la curva, en coordenadas polares, de ecuación $r = \cos(3\theta)$, conocida como rosa de tres pétalos.

a) Grafique la curva dada para $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{6}$ **b**) Grafique la curva dada para $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}$

c) Grafique la curva dada para $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ **d**) Grafique la curva dada para $0 \le \theta \le \dfrac{2\pi}{3}$

e) Grafique la curva dada para $0 \le \theta \le \dfrac{5\pi}{6}$ **f**) Grafique la curva dada para $0 \le \theta \le \pi$

g) Halle el área de la región limitada por la curva.

h) Halle la longitud de la curva.

Solución:

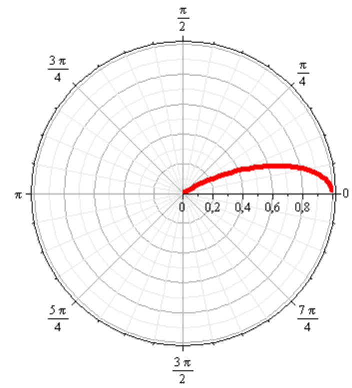
a) Observe que :

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 \le 3\theta \le \frac{\pi}{2}$$

Y en consecuencia,

$$r = \cos(3\theta) \quad \text{varía de 1 a 0}$$

y se obtiene la gráfica mostrada en la figura.



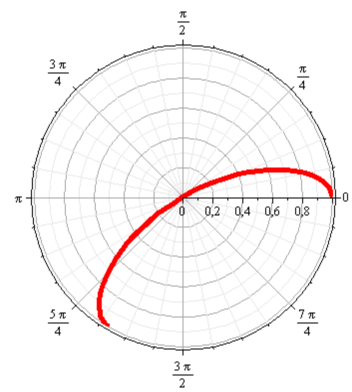
b) Observe que :

$$\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le 3\theta \le \pi$$

Y en consecuencia,

$$r = \cos(3\theta) \quad \text{varía de 0 a -1}$$

y se obtiene parte de la gráfica que se observa en el tercer cuadrante. Luego, cuando $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ se obtiene la gráfica mostrada en la figura.



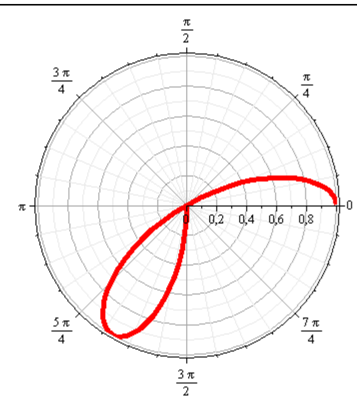
c) Observe que :

$$\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi \le 3\theta \le \frac{3\pi}{2}$$

Y en consecuencia,

$$r = \cos(3\theta) \quad \text{varía de -1 a 0}$$

y se obtiene la otra parte de la gráfica que se observa en el tercer cuadrante. Luego, cuando $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ se obtiene la gráfica mostrada en la figura.



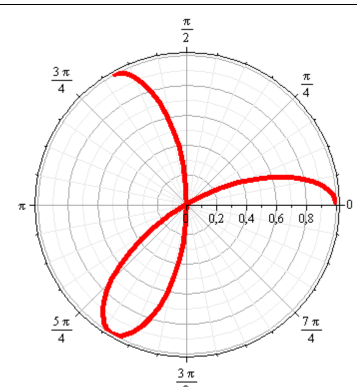
d) Observe que :

$$\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} \le 3\theta \le 2\pi$$

Y en consecuencia,

$$r = \cos(3\theta) \quad \text{varía de 0 a 1}$$

y se obtiene la parte de la gráfica que se observa en el segundo cuadrante. Luego, cuando $0 \le \theta \le \frac{2\pi}{3}$ se obtiene la gráfica mostrada en la figura.



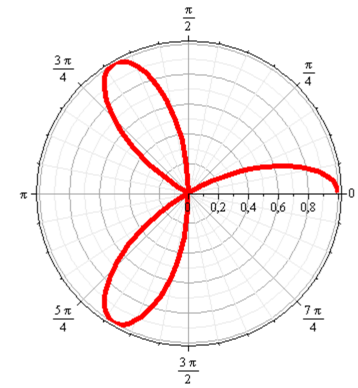
e) Observe que :

$$\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \frac{5\pi}{6} \Rightarrow 2\pi \le 3\theta \le \frac{5\pi}{2}$$

Y en consecuencia,

$r = \cos(3\theta)$ varía de 1 a 0

y se obtiene la otra parte de la gráfica que se observa en el segundo cuadrante. Luego, cuando $0 \le \theta \le \dfrac{5\pi}{6}$ se obtiene la gráfica mostrada en la figura.



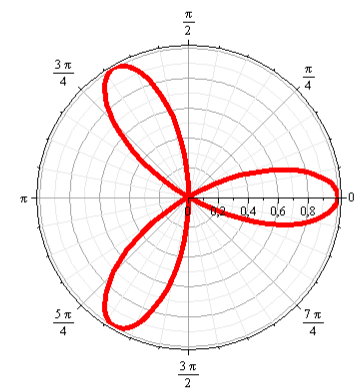
f) Observe que :

$$\frac{5\pi}{6} \le \theta \le \pi \Rightarrow \frac{5\pi}{2} \le 3\theta \le 3\pi$$

Y en consecuencia,

$r = \cos(3\theta)$ varía de 0 a -1

y se obtiene la otra parte de la gráfica que se observa en el primer cuadrante. Luego, cuando $0 \le \theta \le \pi$ se obtiene la gráfica mostrada en la figura.



g) El área de la región es seis veces el área de medio pétalo, luego

$$A = 6 \cdot \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} (cos\,(3\theta))^2 d\theta\right] = 3\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos(6\theta)}{2}\, d\theta = \frac{3}{2}\left[\theta + \frac{\text{sen}\,(6\theta)}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$$

g) La longitud de la curva es seis veces la longitud de medio pétalo, luego

$$L = 6\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{(\cos 3\theta)^2 + (-3\text{sen}3\theta)^2}\, d\theta = 6\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+8\text{sen}^2 3\theta}\, d\theta = 6\left(\frac{\pi}{6}+\frac{8}{3}\right) = \pi + 16$$

Problemas propuestos

En los problemas del 1 y 2 decida si los pares indicados representan el mismo punto.

1) $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{6}\right)$ y $\left(\sqrt{2}, \dfrac{7\pi}{6}\right)$ **2)** $\left(5, \dfrac{\pi}{4}\right)$ y $\left(5, \dfrac{\pi}{4} + 200\pi\right)$

Respuestas: **1**) No **2**) Si

En los problemas del 3 al 7 determine las coordenadas rectangulares del punto cuyas coordenadas polares se da.

3. $\left(4, \dfrac{\pi}{6}\right)$ **4.** $\left(-1, -\dfrac{3\pi}{2}\right)$ **5.** $\left(-3, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ **6.** $\left(2, -\dfrac{\pi}{6}\right)$ **7.** $(0, -\pi)$

Respuestas: 3) $\left(2\sqrt{3}, 2\right)$ **4**) $(0, -1)$ **5**) $\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2}, -\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ **5**) $\left(\sqrt{3}, -1\right)$ **7**) $(0, 0)$

En los problemas del 8 al 12 determine un par de coordenadas polares del punto cuyas coordenadas rectangulares se da.

8. $(-2, -2)$ **9.** $\left(2\sqrt{3}, 2\right)$ **10.** $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$ **11.** $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$ **12.** $\left(\sqrt{6}, \sqrt{2}\right)$

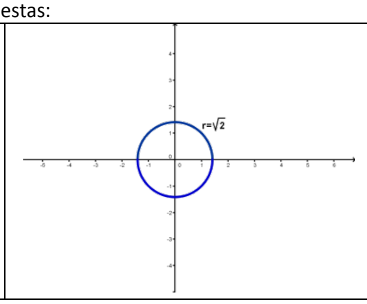
Respuestas: **8**) $\left(2\sqrt{2}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$ **9**) $\left(4, \dfrac{\pi}{6}\right)$ **10**) $\left(2, \dfrac{5\pi}{6}\right)$ **11**) $\left(4, \dfrac{\pi}{3}\right)$ **12**) $\left(2\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{6}\right)$

En los problemas del 13 al 17 represente gráficamente la curva ó la región del plano que corresponde a cada una de las relaciones dadas:

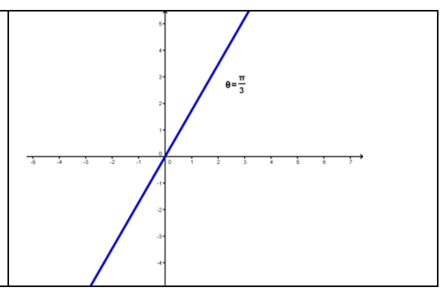
13. $r = \sqrt{2}$ **14.** $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ **15.** $r \geq 0, \quad \theta = \dfrac{\pi}{8}$ **16.** $\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ **17.** $1 < r < \sqrt{5}$

Respuestas:

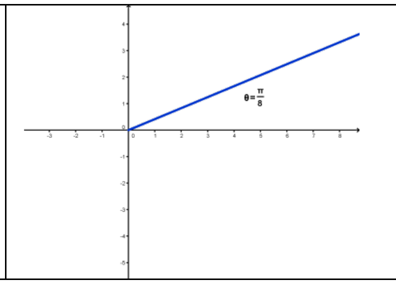
13)



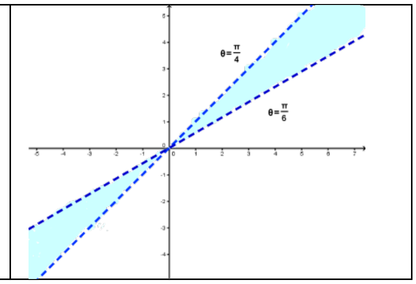
14)



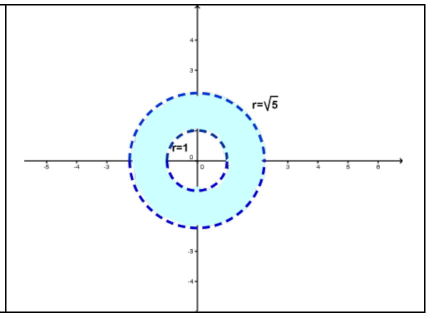
15)



16)



17)



En los problemas del 18 al 23 halle una ecuación en coordenadas polares.

18. $x+y=b$ **19.** $x=2$

20. $3x+4y=5$ **21.** $x^2+y^2=3xy$

22. $x^2+y^2+2x+6y=0$ **23.** $x^2+y^2-4x+4y+4=0$

Respuestas: **18)** $r=\dfrac{b}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}$ **19)** $r\cos\theta=2$ **20)** $r=\dfrac{5}{3\cos\theta+4\operatorname{sen}\theta}$

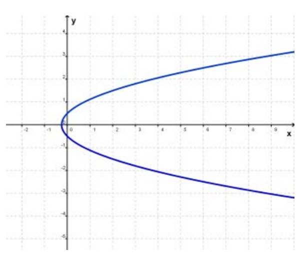
21) $3\cos\theta\operatorname{sen}\theta=1$ **22)** $r^2+2r\cos\theta+6r\operatorname{sen}\theta=0$ **23)** $r^2-4r\cos\theta+4r\operatorname{sen}\theta+4=0$

En los problemas 24 y 25 halle la ecuación en coordenadas rectangulares, identifique y grafique la curva cuya ecuación está dada en coordenadas polares.

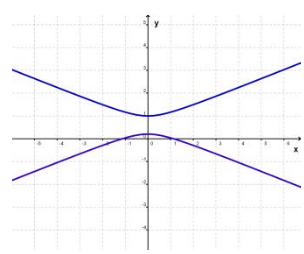
24. $r=\dfrac{1}{2-2\cos\theta}$ **25.** $r=\dfrac{1}{2-3\operatorname{sen}\theta}$

Respuestas:

24) Parábola de ecuación $x=y^2-\dfrac{1}{4}$



25) Hipérbola de ecuación $\dfrac{\left(y+\frac{3}{5}\right)^2}{\frac{4}{25}}-\dfrac{x^2}{\frac{1}{5}}=1$

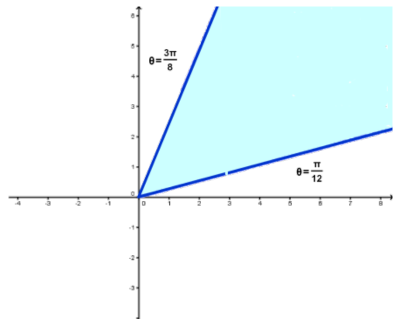


26. La ecuación polar de la recta de ecuación $y=x-3$ es

a) $r=\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$ **b)** $r=-3\cos\theta$ **c)** $r=\dfrac{-3}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}$ **d)** $r=-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta$ **e)** $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

Respuesta: c)

27) La región señalada en la figura adjunta queda definida por la expresión:



a) $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ **b**) $\theta=\dfrac{\pi}{12}$

c) $\dfrac{\pi}{12}<\theta\le\dfrac{3\pi}{8}$ **d**) $\dfrac{\pi}{12}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{8}$

e) $\dfrac{\pi}{12}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{8}$

Respuesta: e)

28. Dadas las ecuaciones en coordenadas polares $r_1=3\cos\theta$ y $r_2=3\operatorname{sen}\theta$.

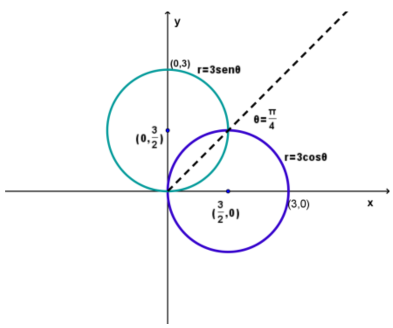
a) Grafique las curvas definidas por las ecuaciones anteriores.

b) Halle los puntos de intersección.

c) Halle el área de la región del plano interior a ambas curvas.

d) Halle los puntos de la curva descrita por r_1, en los cuales la recta tangente es horizontal.

Respuesta:



b) $P_1\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}},\dfrac{\pi}{4}\right)$ y $P_0\left(0,0\right)$ **c**) $\dfrac{9\pi-18}{8}$

d) $P_1\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ y $P_2\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$

29. Dadas las ecuaciones en coordenadas polares $r_1=\sqrt{3}\cos\theta$ y $r_2=\operatorname{sen}\theta$.

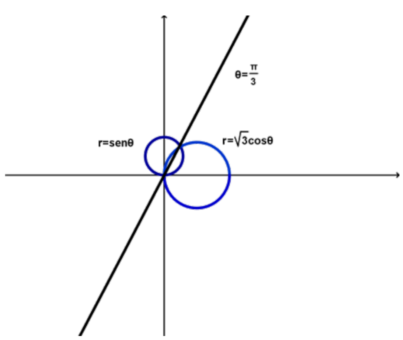
a) Grafique las curvas definidas por las ecuaciones anteriores.

b) Halle los puntos de intersección.

c) Halle el área de la región del plano interior a ambas curvas

d) Halle los puntos de la curva descrita por r_1, en los cuales la recta tangente es horizontal.

Respuesta:



b) $P_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\pi}{3}\right)$ y $P_0\left(0,0\right)$ **c**) $\dfrac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$

d) $P_1\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ y $P_2\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$

30. Dadas las ecuaciones en coordenadas polares $r_1=2\cos\theta$ y $r_2=2\operatorname{sen}\,\theta$

a) Halle, usando las ecuaciones de transformación, las ecuaciones cartesianas y grafique ambas.

b) Halle en coordenadas polares los puntos de intersección de las curvas.

c) Halle el área de la región del plano interior a la curva de ecuación $r_1 = 2\cos\theta$ y exterior a la curva de ecuación $r_2 = 2\text{sen }\theta$

d) Halle la longitud de la porción de $r_1 = 2\cos\theta$ que es exterior $r_2 = 2\text{sen }\theta$ y está en el primer cuadrante

Respuesta:

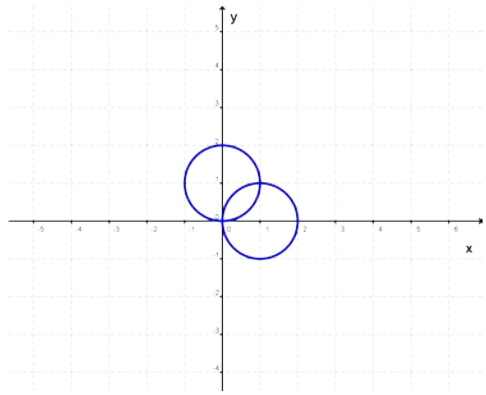
a) $r = 2\cos\theta \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

$r = 2\text{sen}\,\theta \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$

b) $P\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ y en el polo u origen

c) $A = \frac{\pi}{2} + 1$

d) $L = \frac{\pi}{2}$



31. Dadas las ecuaciones en coordenadas polares $r_1 = 8\text{sen}\,\theta$ y $r_2 = 4$.

a) Grafique las curvas definidas por las ecuaciones anteriores (sin pasar a coordenadas rectangulares).

b) Halle los puntos de intersección en coordenadas polares.

c) Halle el área de la región del plano que es interior a r_1 y exterior a r_2, ubicada en el primer cuadrante.

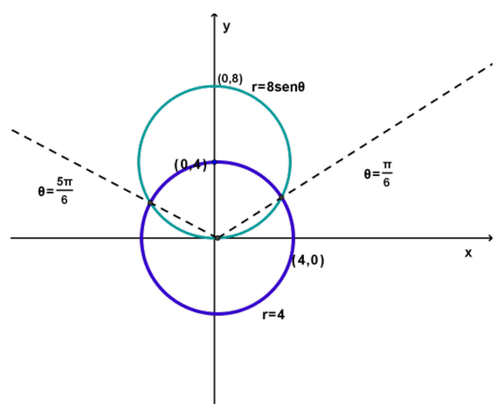
d) Calcule la longitud del arco de curva r_2 que es interior a r_1.

Respuesta:

b) $P_1\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ y $P_1\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$

c) $A = 8\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

d) $L = \frac{8}{3}\pi$



32. Dadas las ecuaciones en coordenadas polares $r_1 = 2 - \cos\theta$ y $r_2 = 2$.

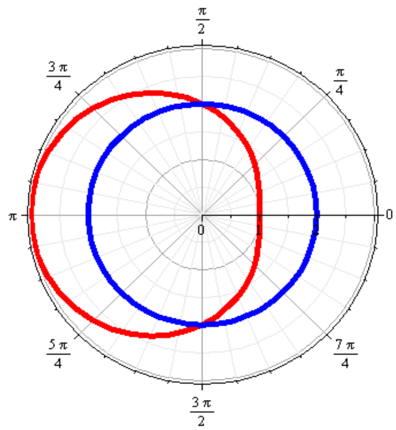
a) Grafique las curvas definidas por las ecuaciones anteriores.

b) Halle los puntos de intersección.

c) Halle el área de la región del plano interior a r_1 y exterior a r_2.

d) Plantee la integral que da la longitud de la parte de r_1 que está en el tercer cuadrante.

Respuesta:



b) $P_1\left(2,\dfrac{\pi}{2}\right)$ y $P_2\left(2,\dfrac{3\pi}{2}\right)$

c) $\dfrac{\pi}{4}+4$

d) $L=\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{5-4\cos\theta}\,d\theta$

33. Dadas las ecuaciones en coordenadas polares $r_1 = 3\cos\theta$ y $r_2 = 2-\cos\theta$.

a) Grafique las curvas definidas por las ecuaciones anteriores.

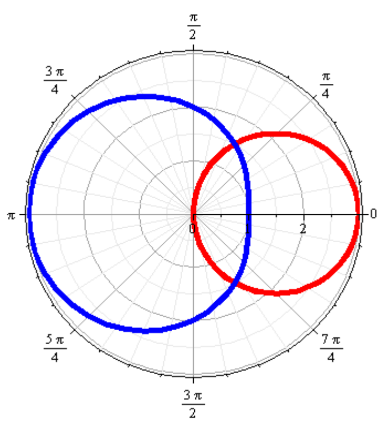
b) Halle los puntos de intersección.

c) Halle el área de la región del plano interior r_1 y exterior a r_2.

d) Halle el área de la región del plano interior a ambas curvas.

e) Halle los puntos de la curva descrita por r_1, en los cuales la recta tangente es horizontal.

Respuesta:



b) $P_1\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\pi}{3}\right)$ y $P_2\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5\pi}{3}\right)$

c) $3\sqrt{3}$

d) $\dfrac{9}{4}\pi-3\sqrt{3}$

e) $P_1\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ y $P_2\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$

34. Dadas las ecuaciones en coordenadas polares $r_1 = 1-\operatorname{sen}\theta$ y $r_2 = 1$.

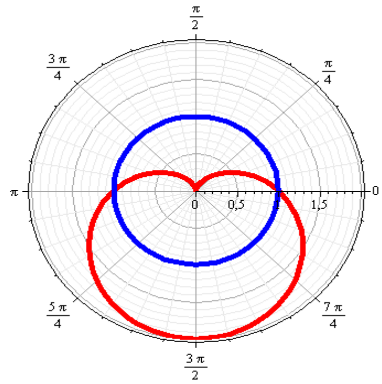
a) Grafique las curvas definidas por las ecuaciones anteriores.

b) Halle los puntos de intersección.

c) Halle el área de la región del plano interior a r_1 y exterior a r_2.

d) Determine la longitud de la parte de r_1 que está en el segundo cuadrante.

Respuesta:



b) $P_1(1,0)$ y $P_2(1,\pi)$

c) $\dfrac{\pi}{4}+1$

d) $4-2\sqrt{2}$

35. Dadas las ecuaciones en coordenadas polares $r_1 = 2+cos\,\theta$ y $r_2 = 2$.

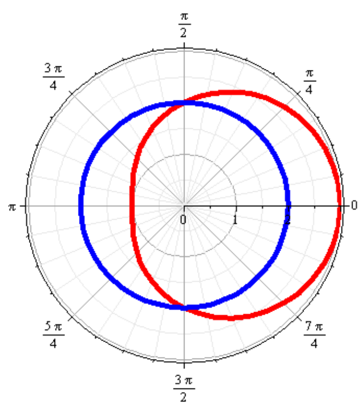
a) Grafique las curvas definidas por las ecuaciones anteriores.

b) Halle los puntos de intersección.

c) Halle el área de la región del plano interior a ambas curvas.

d) Plantee la integral que da la longitud de la parte de r_1 que está en el tercer cuadrante.

Respuesta:



b) $P_1\left(2,\dfrac{\pi}{2}\right)$ y $P_1\left(2,\dfrac{3\pi}{2}\right)$

c) $\dfrac{17\pi}{4}-4$

d) $L=\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{5+4\cos\theta}\;d\theta$

36. En los siguientes enunciados. Indique si cada uno de ellos es verdadero o falso, escribiendo respectivamente la letra V o F en la casilla señalada.

a) $(3,\frac{\pi}{6})$ y $(-3,\frac{-5\pi}{6})$ son las coordenadas polares del mismo punto del plano.
b) El punto A $(4,\frac{3\pi}{2})$ no está en la gráfica de la curva de ecuación $r=4\cos(2\theta)$ ya que sus coordenadas no satisfacen la ecuación.
c) Las coordenadas rectangulares del punto que tiene coordenadas polares $\mathrm{A}(4,\frac{3\pi}{2})$ son $\mathrm{A}(-1,1)$.
d) La gráfica de la curva de ecuación polar $r=-5\sec\theta$ es una recta.
e) La ecuación polar con la misma gráfica que el círculo de ecuación $x^2+y^2=4y$ es $r=4\cos\theta$.
f) La ecuación cartesiana con la misma gráfica que la curva de ecuación polar $r=\dfrac{-4}{1-\operatorname{sen}\theta}$ es la parábola $x^2=8(2-y))$
g) La expresión del área de la región interior a la curva de ecuación $r_1=\operatorname{sen}\theta$ y exterior a la curva de ecuación $r_2=\cos\theta$ en el primer cuadrante es $A(R)=\dfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(-2\cos(2\theta)\right)d\theta$.
h) La longitud de arco en el cuarto cuadrante de la cardioide de ecuación $r=2-2\operatorname{sen}\theta$ es $L=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0}\sqrt{(8sen(\theta)-8)}\,d\theta$
i) Un punto intersección entre las cardioides de ecuaciones $r_1=1+\operatorname{sen}\theta$ y $r_2=1-\cos\theta$ es $\mathrm{P}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\frac{7\pi}{4}\right)$.
j) Unas coordenadas polares del punto $\mathrm{Q}\left(\frac{-1}{4},\frac{-1}{4}\right)$ son $\mathrm{Q}\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{-3\pi}{4}\right)$

Respuesta: **a**) V **b**) V **c**) F **d**) V **e**) F **f**) V **g**) V **h**) F **i**) F **j**) V

INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS CARTESIANAS Y POLARES

Definiciones, propiedades y teoremas importantes

Teorema 5.1: Supongamos que $\iint_D f(x,y)dA$ y $\iint_D g(x,y)dA$ existen sobre una región *D* del plano.

- $\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]dA = \iint_D f(x,y)dA + \iint_D g(x,y)dA$
- $\iint_D cf(x,y)dA = c\iint_D f(x,y)dA$ para toda constante c.
- Si $f(x,y) \le g(x,y)$ para toda $(x,y) \in D$ entonces $\iint_D f(x,y)dA \le \iint_D g(x,y)dA$
- Si $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 se intersecan a lo sumo en un segmento, se tiene que $\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$.
- $\iint_D dA = A(D)$ (donde $A(D)$ denota el área de la región *D*)
- Si $m \le f(x,y) \le M$ para toda $(x,y) \in D$ entonces $m \cdot A(D) \le \iint_D f(x,y)dA \le M \cdot A(D)$
- Si $0 \le f(x,y)$ para toda $(x,y) \in D$ entonces $\iint_D f(x,y)dA$ es igual al el volumen del sólido limitado superiormente por la gráfica de $z = f(x,y)$ e inferiormente por *D.*

Definición 5.1: Una región *D* del plano es del Tipo I:

Si *D* está dada por $a \le x \le b$, $g_1(x) \le y \le g_2(x)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a,b]$

Definición 5.2: Una región *D* del plano es del Tipo II:

D está dada por $c \le y \le d$, $h_1(x) \le x \le h_2(x)$, con h_1 y h_2 continuas en $[c,d]$

Teorema 5.2: (Teorema de Fubini) Sea *f* una función real de dos variables *x* y *y* continua en una región *D* del plano.

i) Si D está dada por $a \le x \le b$, $g_1(x) \le y \le g_2(x)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a,b]$, entonces

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

ii) Si D está dada por $c \le y \le d$, $h_1(x) \le x \le h_2(x)$, con h_1 y h_2 continuas en $[c,d]$, entonces

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\, dx\, dy$$

Teorema 5.3: Sea D la región del plano definida por todos los puntos $(x,y) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ con $0 \le g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$, $\alpha) \le \theta \le \beta$, donde $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$. Si g_1 y g_2 son continuas en $[\alpha,\beta]$ y f es continua en D, entonces

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Definición 53: El jacobiano de la transformación T dado por $x = g(u,v)$ y $y = h(u,v)$ es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Teorema 5.4: Sea que T es una transformación C^1 cuyo jacobiano es no nulo y que relaciona una región S del plano uv con una región D del plano xy. Si f es continua en D, y D y S son regiones planas del tipo I o II, y T es uno a uno, excepto quizás en el límite de S. Entonces

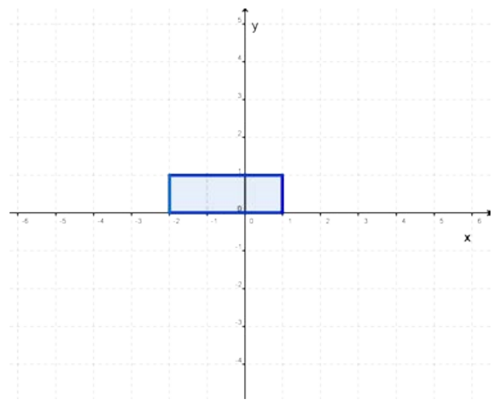
$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv$$

Problemas resueltos

1. Halle $\iint\limits_R 5xy\,dx\,dy$ y $\iint\limits_R 5xy\,dy\,dx$ donde *R* es la región rectangular de vértices: $(-2,0)$, $(1,0)$, $(-2,1)$ y $(1,1)$.

Solución:

La región *R* sobre la cual se integra corresponde a la región sombreada mostrada en la figura.



En consecuencia,

$$\iint\limits_R 5xy\,dx\,dy = 5\int_0^1\int_{-2}^1 xy\,dx\,dy = 5\int_0^1\left[\frac{x^2}{2}y\Big|_{-2}^1\right]dy = 5\int_0^1\left[\frac{1}{2}-2\right]ydy = -\frac{15}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{15}{4}$$

$$\iint\limits_R 5xy\,dy\,dx = 5\int_{-2}^1\int_0^1 xy\,dy\,dx = 5\int_{-2}^1\left[\frac{y^2}{2}x\Big|_0^1\right]dx = \frac{5}{2}\int_{-2}^1 x\,dx = \frac{5x^2}{4}\Big|_{-2}^1 = \frac{5}{4}(1-4) = -\frac{15}{4}$$

2. Dada la expresión

$$I = \int_{-1}^0\int_x^{x^3} f(x,y)dy\,dx + \int_0^1\int_{x^3}^x f(x,y)dy\,dx$$

dibuje la región de integración e invierta el orden de integración.

Solución:

Para dibujar la región de integración observe que de la primera integral se deduce que

$$-1 \le x \le 0 \;\text{ y }\; x \le y \le x^3$$

y de la segunda integral se tiene que

$$0 \le x \le 1 \;\text{ y }\; x^3 \le y \le x$$

La región de integración corresponde a la región sombreada mostrada en la figura.

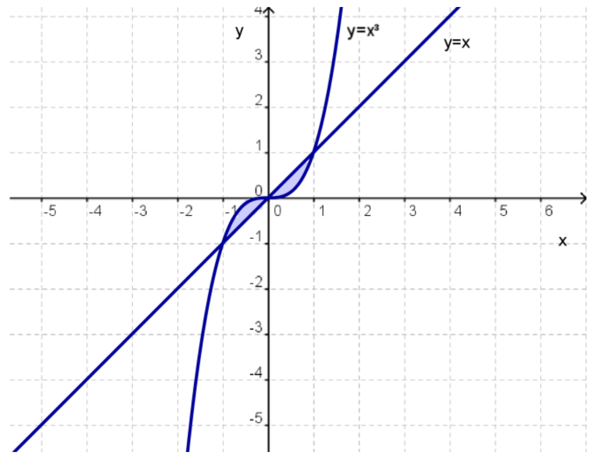
Para plantear la integral I en el otro orden:

Observe que

$$y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

Si $-1 \le y \le 0$ entonces $\sqrt[3]{y} \le x \le y$

Si $0 \le y \le 1$ entonces $y \le x \le \sqrt[3]{y}$



Por lo tanto,

$$I = \int_{-1}^{0} \int_{\sqrt[3]{y}}^{y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{0}^{1} \int_{y}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

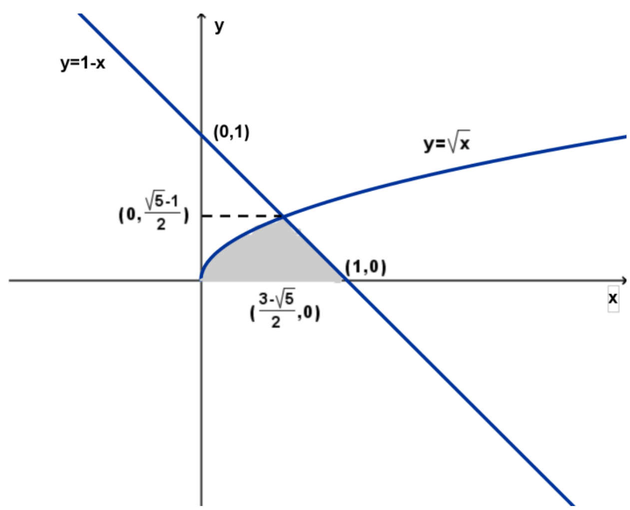
3. Dibuje la región de integración *R* y plantee las integrales $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ y $\iint_R f(x,y)\,dy\,dx$, si *R* es la región del plano limitada por las curvas de ecuaciones $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y + x = 1$.

Solución:

Para representar gráficamente la región R es necesario hallar la intersección de la curva de ecuación $y = \sqrt{x}$ con la recta de ecuación $x + y = 1$, para lo cual se debe resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow 1 - x = \sqrt{x} \Rightarrow (1-x)^2 = x$$

$$\Rightarrow 1 - 2x + x^2 = x \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$



Al resolver la ecuación cuadrática resulta,

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Observe que $0 \le x \le 1$, la solución es $x_0 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.Por lo tanto, las curvas se intersecan en el punto de coordenadas $P\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, como se observa en la figura.

En consecuencia,

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \int_{y^2}^{1-y} f(y,x)\,dx\,dy$$

$$\iint_R f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{1} \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

4. Calcule $\iint_D y\ln x\,dxdy$ donde *D* es la región del plano limitada por las curvas de ecuaciones $xy=1$, $y=\sqrt{x}$, $x=2$.

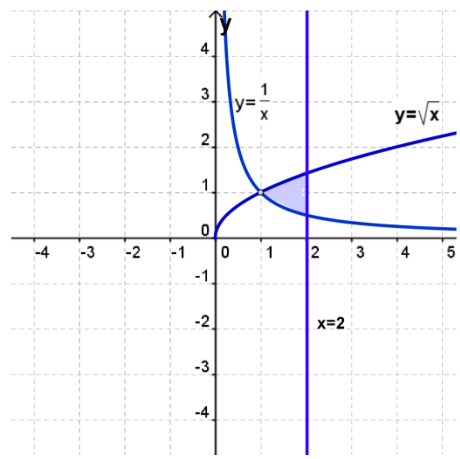
Solución:

Para representar gráficamente la región D, observe que las curvas $xy=1$, $y=\sqrt{x}$ se intersecan en el punto $P(1,1)$, la región de integración corresponde a la zona sombreada que se observa en la figura.

La integral planteada es igual a

$$\iint_D y\ln x\,dxdy = \int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} y\ln x\ dy\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(x\ln x - \frac{\ln x}{x^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right)_1^2 = \frac{5}{8}(2\ln 2 - 1)$$



5. Dada la integral $I = \int_0^{\frac{1}{e}} \int_{-1}^{e^x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{\frac{1}{e}}^{1} \int_{\ln x}^{e^x} f(x,y)\,dy\,dx$, grafique la región de integración y plantee *I* en el orden *dxdy*.

Solución:

De la primera integral se deduce que:

$$0 \le x \le \frac{1}{e} \quad \text{y} \quad -1 \le y \le e^x$$

y de la segunda integral se obtiene

$$\frac{1}{e} \le x \le 1 \quad \text{y} \quad \ln x \le y \le e^x$$

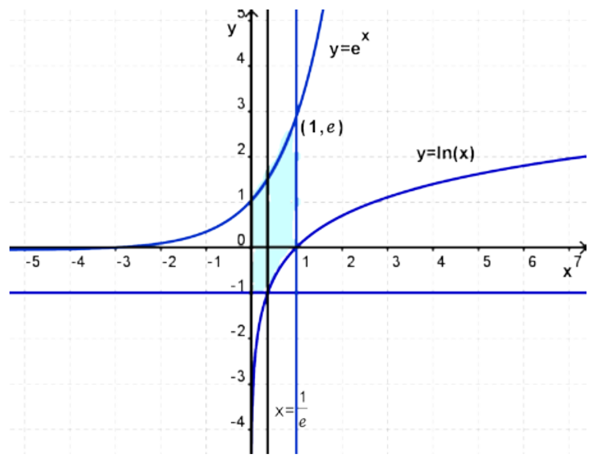
De estas desigualdades se deducen las curvas de ecuaciones: $x=0$, $x=\dfrac{1}{e}$, $y=-1$, $y=e^{x}$, $x=1$ *y* $y=\ln x$.

Observe que la recta de ecuación $y=-1$ interseca a la curva de ecuación $y=\ln x$ en el punto de coordenadas $\left(\dfrac{1}{e},-1\right)$; y la recta de ecuación $x=1$ interseca a la curva de ecuación $y=e^{x}$ en el punto de coordenadas $(1,e)$.

Por otra parte, se tiene que:

$$y=\ln x \Leftrightarrow x=e^{y} \quad \text{y} \quad y=e^{x} \Leftrightarrow x=\ln y$$

Al dibujar la región de integración se obtiene la región sombreada mostrada en la figura



Luego,

$$I=\int_{-1}^{0}\int_{0}^{e^{y}} f(x,y)\,dx\,dy+\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} f(x,y)\,dx\,dy+\int_{1}^{e}\int_{\ln y}^{1} f(x,y)\,dx\,dy$$

6. Represente gráficamente la región de integración e invierta el orden de integración en la integral $I=\int_{0}^{1}\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^{2}}} f(x,y)\,dx\,dy$.

Solución:

Para dibujar la región de integración observe que $0\le y\le 1$ y $2-y\le x\le 1+\sqrt{1-y^{2}}$.

De estas desigualdades se deducen las ecuaciones: $y=0$, $y=1$, $x=2-y$ y $x=1+\sqrt{1-y^{2}}$.

Luego, se obtiene:

$$x=1+\sqrt{1-y^{2}} \Rightarrow (x-1)^{2}=1-y^{2} \Rightarrow y^{2}+(x-1)^{2}=1$$

que es la ecuación de una circunferencia de centro $C(1,0)$ y radio 1.

Además,

$$y=\sqrt{1-(x-1)^2} \Rightarrow y=\sqrt{1-x^2+2x-1} \Rightarrow y=\sqrt{-x^2+2x}$$

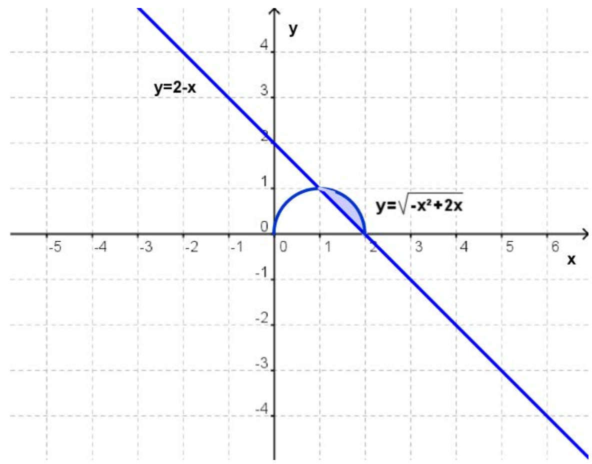
Para determinar los puntos de intersección de las curvas de ecuaciones $x=2-y$ y $x=1+\sqrt{1-y^2}$, se debe resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x=2-y \\ x=1+\sqrt{1-y^2} \end{cases}$.

Luego,

$$2-y=1+\sqrt{1-y^2} \Rightarrow (1-y)^2=1-y^2 \Rightarrow 1-2y+y^2=1-y^2 \Rightarrow -2y+2y^2=0 \Rightarrow 2y(1-y)=0$$
$$\Rightarrow y=0 \quad ó \quad y=1$$

$$y=0 \Rightarrow x=2 \quad \text{y} \quad y=1 \Rightarrow x=1$$

En consecuencia dichas curvas se intersecan en los puntos $(1,1)$ y $(2,0)$. La región de integración es la región sombreada mostrada en la figura.



Se tiene entonces que

$$\int_0^1 \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{-x^2+2x}} f(x,y)\,dy\,dx$$

7. Sea f una función de dos variables definida por $z=f(x,y)$ en la región *R*, limitada por las curvas de ecuaciones $y=-1$, $y=1+x^2$, $x=-2$, $x=1$, $y=2$, $y^2=-1-x$.

a) Represente gráficamente la región *R*.

b) Plantee la integral $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$.

Solución:

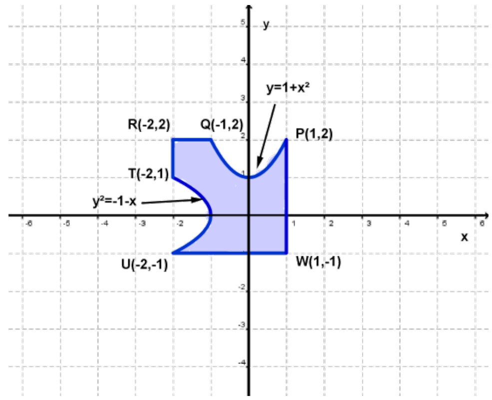
a) Al dibujar las distintas curvas, cuyas ecuaciones se indican en el enunciado, se obtiene que la región de integración es la zona sombreada en la figura.

Los puntos de intersección se obtienen al resolver los sistemas:

$\begin{cases} x=1 \\ y=1+x^2 \end{cases} \Rightarrow y=2 \Rightarrow P(1,2)$ $\qquad$ $\begin{cases} y=2 \\ y=1+x^2 \end{cases} \Rightarrow x=-1 \Rightarrow Q(-1,2)$

$$\begin{cases} y=-1 \\ y^2=-1-x \end{cases} \Rightarrow x=-2 \Rightarrow U(-2,-1)$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ y^2=-1-x \end{cases} \Rightarrow y=1 \Rightarrow T(-2,1)$$



b) $$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{-y^2-1}^{1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{1}^{2}\int_{-2}^{-\sqrt{y-1}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{1}^{2}\int_{\sqrt{y-1}}^{1} f(x,y)\,dx\,dy$$

8. Dada la expresión

$$I=\int_{-4}^{-2}\int_{-\sqrt{4-(x+2)^2}}^{\sqrt{4-(x+2)^2}} f(x,y)\,dy\,dx+\int_{-2}^{2}\int_{-2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx+\int_{2}^{4}\int_{-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{\sqrt{4-(x-2)^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

a) Dibuje la región de integración *I*.
b) Plantee *I* en el orden *dxdy*.

Solución:

a) De la primera integral se deduce que:

$$-4 \le x \le -2 \quad \text{y} \quad -\sqrt{4-(x+2)^2} \le y \le \sqrt{4-(x+2)^2}$$

De estas desigualdades se deducen las ecuaciones: $x=-4$, $x=-2$, $y=-\sqrt{4-(x+2)^2}$ y $y=\sqrt{4-(x+2)^2}$.

$$-\sqrt{4-(x+2)^2}=y \Rightarrow y^2+(x+2)^2=4 \quad \text{y} \quad \sqrt{4-(x+2)^2}=y \Rightarrow y^2+(x+2)^2=4$$

Es decir, en la primera integral se integra sobre el semicírculo izquierdo de centro $(-2,0)$ y radio 2.

De la segunda integral se obtiene

$$-2 \le x \le 2 \quad \text{y} \quad -2-\sqrt{4-x^2} \le y \le 2+\sqrt{4-x^2}$$

De estas desigualdades se deducen las ecuaciones: $x=-2$, $x=2$, $y=-2-\sqrt{4-x^2}$ y $y=2+\sqrt{4-x^2}$.

$$-2-\sqrt{4-x^2}=y \Rightarrow (y+2)^2+x^2=4 \quad \text{y} \quad 2+\sqrt{4-x^2}=y \Rightarrow (y-2)^2+x^2=4$$

Es decir, la región de integración de la segunda integral corresponde a la limitada por el semicírculo inferior de centro $(0,-2)$ y radio 2, y por el semicírculo superior de centro $(0,2)$ y radio 2 y las rectas de ecuaciones $x=-2$ y $x=2$.

De la tercera integral, se tiene que:

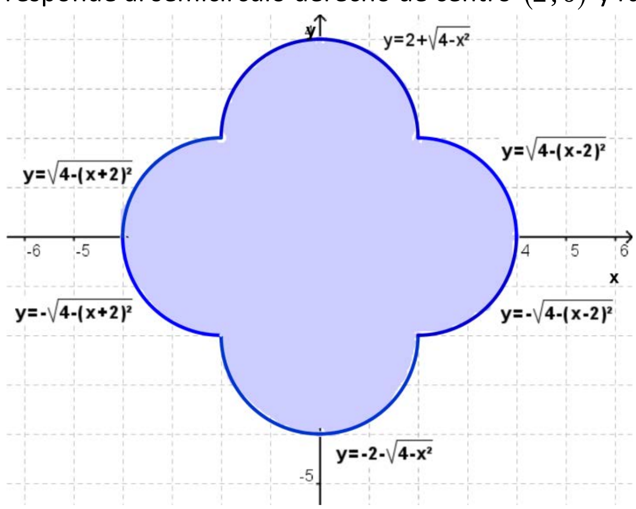
$$2 \le x \le 4 \quad \text{y} \quad -\sqrt{4-(x-2)^2} \le y \le \sqrt{4-(x-2)^2}$$

De estas desigualdades se deducen las ecuaciones: $x=2$, $x=4$, $y=-\sqrt{4-(x-2)^2}$ y $y=\sqrt{4-(x-2)^2}$.

$$-\sqrt{4-(x-2)^2}=y \Rightarrow y^2+(x-2)^2=4 \quad \text{y} \quad \sqrt{4-(x-2)^2}=y \Rightarrow y^2+(x-2)^2=4$$

Es decir, la región de integración corresponde al semicírculo derecho de centro $(2,0)$ y radio 2.

Finalmente, la región de integración es la unión de las 3 regiones antes descritas y que corresponde la región sombreada en la figura.



b) Al plantear I en coordenadas cartesianas, se obtiene:

$$I=\int_{-4}^{-2}\int_{-\sqrt{4-(y+2)^2}}^{\sqrt{4-(y+2)^2}} f(x,y)\,dx\,dy+\int_{2}^{4}\int_{-\sqrt{4-(y-2)^2}}^{\sqrt{4-(y-2)^2}} f(x,y)\,dx\,dy+\int_{-2}^{2}\int_{-2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

9. Calcule $\displaystyle\int_0^1\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 e^{y^2}\,dy\,dx$

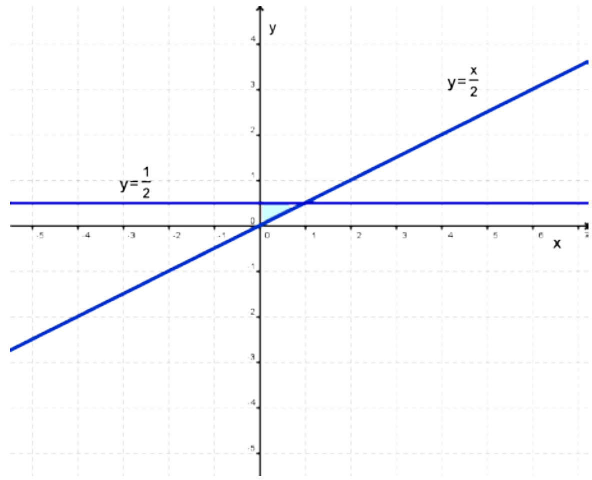
Solución:

La función $f(y)=e^{y^2}$ no es integrable en términos de funciones elementales, no obstante, la integral puede ser resuelta si se invierte el orden de integración.

De la integral dada se tiene que

$$0 \leq x \leq 1 \text{ y } \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$$

De manera que la región de integración es la sombreada en la figura.



Luego,

$$I=\int_0^1\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 e^{y^2}\,dy\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{2y} x^2 e^{y^2}\,dx\,dy=\int_0^{\frac{1}{2}} e^{y^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^{2y} dy=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{y^2} y^3\,dy$$

Sea $z=y^2$ entonces $dz=2ydy$; $y=0 \Rightarrow z=0$ y $y=\frac{1}{2} \Rightarrow z=\frac{1}{4}$

Entonces,

$$I=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{1}{4}} z\,e^z\,\frac{dz}{2}=\frac{4}{3}\left[ze^z-e^z\right]_0^{\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}}-e^{\frac{1}{4}}+1\right)=\frac{4}{3}\left(-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}}+1\right)=\frac{4}{3}-e^{\frac{1}{4}}$$

10. Dada la integral $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}\int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$.

a) Grafique la región de integración.
b) Plantee la integral en el orden *dydx*.
c) Plantee la integral en coordenadas polares.

Solución:

a) De la integral se deduce que:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq y \leq 0 \quad \text{y} \quad -y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$$

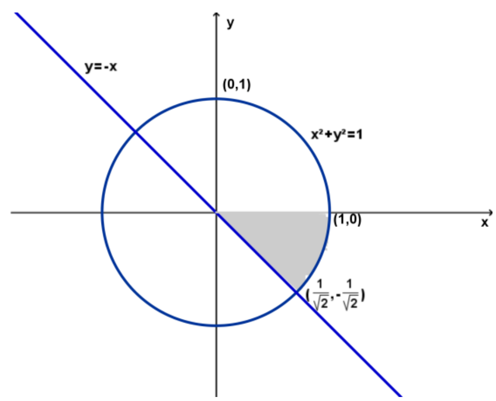
Y a partir de estas inecuaciones se deducen las curvas de ecuaciones $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=0$, $x=-y$ y $x=\sqrt{1-y^2}$.

Para determinar la región de integración es importante determinar los puntos de intersección de la recta de ecuación $x=-y$ con la semicircunferencia de ecuación $x=\sqrt{1-y^2}$.

$$-y=\sqrt{1-y^2}\Rightarrow y^2=1-y^2\Rightarrow 2y^2=1\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

En consecuencia, se intersecan en los puntos $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Al dibujar las curvas, tomando en cuenta que $-\frac{1}{\sqrt{2}}\le y\le 0$, resulta la región sombreada en la figura.



b) Al plantear la integral en coordenadas cartesianas, se obtiene:

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}\int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-x}^{0} f(x,y)\,dy\,dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy\,dx$$

c) La ecuación $x^2+y^2=1$ se transforma en coordenadas polares en $r^2=1$.

Por otra parte, observe que

$$\tan\theta=\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=-1\Rightarrow\theta=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$$

En consecuencia la región sobre la cual se integra puede ser descrita en coordenadas polares como

$$\left\{(r,\theta)/\,0\le r\le 1 \quad y \quad \frac{7\pi}{4}\le\theta\le 2\pi\right\}$$

Al plantear la integral se obtiene

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}\int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f\,(x,y)\,dx\,dy = \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}\int_{0}^{1} r\; f\left(r\cos\theta\,, r\,sen\,\theta\right)dr\,d\theta$$

11. Dada la expresión

$$I = \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} x\,dx\,dy + \int_{1}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{0} x\,dx\,dy$$

a) Represente gráficamente la región de integración.
b) Calcule la integral utilizando coordenadas polares.

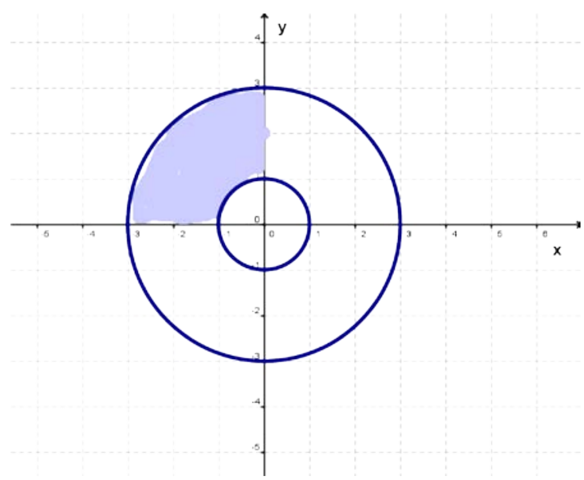
Solución:

a) De la primera integral se deduce que:

$$0 \le y \le 1 \quad \text{y} \quad -\sqrt{9-y^2} \le x \le -\sqrt{1-y^2}$$

Y de la segunda integral se deduce que

$$1 \le y \le 3 \quad \text{y} \quad -\sqrt{9-y^2} \le x \le 0$$



De estas inecuaciones se obtienen las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 = 9$$

que en coordenadas polares se expresan como

$$r = 1 \quad \text{y} \quad r = 3$$

Se observa además que $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$.

La región de integración se representa sombreada en la figura anexa.

b) $$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{1}^{3} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta = \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[r^3\right]_1^3 \cos\theta\,d\theta = = \frac{26}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\theta\,d\theta = \frac{26}{3}\left[\text{sen}\,\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{26}{3}$$

12. Sea $I = \int_{\pi}^{2\pi}\int_{e}^{e^2} r\ln r\,dr\,d\theta$.

a) Resuelva la integral
b) Dibuje la región de integración.
c) Plantee la integral en coordenadas cartesianas.

Solución:

a) $I=\int_{\pi}^{2\pi}\int_{e}^{e^2} \mathrm{r}\ln \mathrm{r}\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\theta = \int_{\pi}^{2\pi}\left[\dfrac{r^2\ln r}{2}-\dfrac{r^2}{4}\right]_{e}^{e^2} d\theta = \int_{\pi}^{2\pi}\left[\dfrac{e^4\ln e^2}{2}-\dfrac{e^4}{4}-\dfrac{e^2\ln e}{2}+\dfrac{e^2}{4}\right]d\theta =$

$=\left(\dfrac{3e^4}{4}-\dfrac{e^2}{4}\right)[\theta]_{\pi}^{2\pi}=\dfrac{\pi}{2}\left(3\mathrm{e}^4-e^2\right)$

b) Observe que

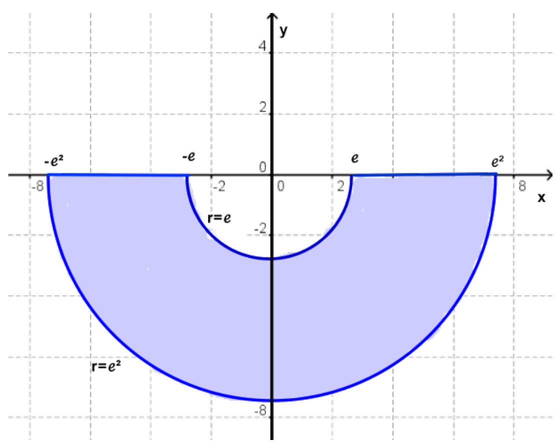
$$D=\{(r,\theta)/\quad e\le r\le e^2 \quad \text{y} \quad \pi\le\theta\le 2\pi\}$$

Como

$$e\le r\le e^2 \Rightarrow e^2\le r^2\le e^4 \Rightarrow e^2\le x^2+y^2\le e^4 \quad \text{y} \quad \pi\le\theta\le 2\pi$$

D es la parte inferior del anillo limitado por las circunferencias de centro $(0,0)$ y radios *e* y e^2 respectivamente, es decir

$$D=\{(x,y)\in R^2 /\quad e^2\le x^2+y^2\le \mathrm{e}^4,\quad y\le 0\}$$



c) Al plantear la integral en coordenadas cartesianas, se obtiene:

$$I=\int_{-e^2}^{-e}\int_{-\sqrt{e^4-x^2}}^{0}\ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+\int_{-e}^{e}\int_{-\sqrt{e^4-x^2}}^{-\sqrt{e^2-x^2}}\ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+\int_{e}^{e^2}\int_{-\sqrt{e^4-x^2}}^{0}\ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

13. Calcule $\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$, donde *D* es la región del plano limitada por la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$.

Solución:

Observe que:

$$x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax = 0 \Rightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2$$

Luego, D es la región del plano dada por

$$D = \left\{(x, y) \in R^2 \,/\quad (x-a)^2 + y^2 \le a^2\right\}$$

Dado que $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ es la ecuación de una circunferencia, la integral planteada puede ser resuelta más fácilmente en coordenadas polares.

$$x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow r^2 = 2ar\cos\theta$$

Luego,

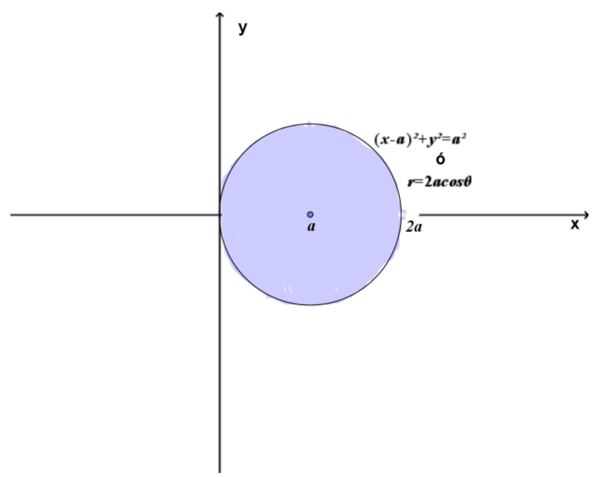
$$0 \le r \le 2a\cos\theta \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

o también

$$0 \le \theta \le \pi \quad \text{si considera } r \in R .$$

Es decir, la región *D* es descrita en coordenadas polares como

$$D = \left\{(r, \theta)/\quad 0 \le r \le 2a\cos\theta \quad \text{y} \quad 0 \le \theta \le \pi\right\}$$



Por lo tanto,

$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy = \int_0^{\pi}\int_0^{2a\cos\theta} r^2 \,\mathrm{r\,dr\,d\theta} = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left[r^4\right]_0^{2a\cos\theta} d\theta = 4a^4 \int_0^{\pi} \cos^4\theta\, d\theta = 4a^4 \int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= a^4 \int_0^{\pi}\left(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) d\theta = a^4 \int_0^{\pi}\left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta = \frac{3}{2}\pi a^4$$

14. Dada la integral $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{a\,\mathrm{sen}\,\theta}^{2a\csc\theta} r^3 \mathrm{sen}^2\theta\, dr\, d\theta$ con $a > 0$, dibuje la región de integración y plantee la integral en coordenadas cartesianas.

Solución:

De la integral se deduce que

$$\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{4} \qquad \text{y} \qquad a\,\text{sen}\,\theta \le r \le 2a\csc\theta$$

Y de las desigualdades se cumple que:

$$r = a\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow r^2 = ar sen\,\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = ay \Rightarrow x^2 + y^2 - ay = 0 \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$r = 2a\csc\theta \Rightarrow r = \frac{2a}{sen\,\theta} \Rightarrow r\;sen\,\theta = 2a \Rightarrow y = 2a$$

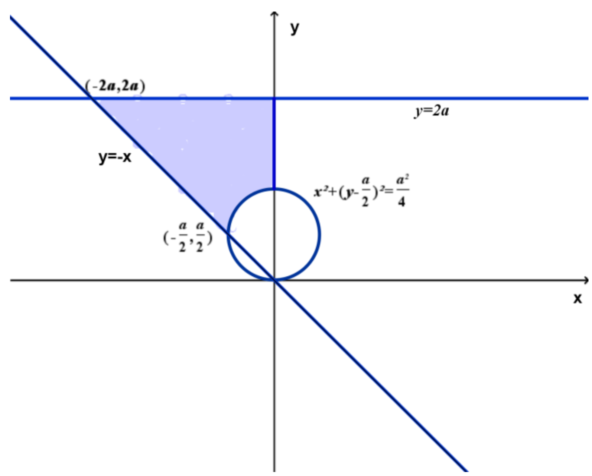
$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0 \quad \text{y} \quad \theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = -y$$

Al dibujar las curvas de ecuaciones

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}\,,\; y = 2a\,,$$

$$x = 0 \;\; \text{y} \;\; x = -y$$

Y las desigualdades correspondientes se obtiene la región sombreada en la figura anexa.



La intersección de la circunferencia con la recta de ecuación $x = -y$ viene dada por:

$$(-y)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow 2y^2 - ay = 0 \Rightarrow y = 0 \quad ó \quad y = \frac{a}{2}$$

Por lo tanto los puntos de intersección son $(0,0)$ y $\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$.

Además, el integrando puede ser expresado como

$$r^3 sen^2\theta = r \cdot r^2 sen^2\theta$$

Como $r^2 sen^2\theta = y^2$

Se obtiene que

$$I = \int_{-2a}^{-\frac{a}{2}} \int_{-x}^{2a} y^2\, dy\, dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{0} \int_{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}}^{2a} y^2 dy\, dx$$

15. Sea *R* el conjunto de los puntos del plano, de coordenadas (x, y), que satisfacen las desigualdades siguientes: $y \leq x$, $y \geq -x$ y $x^2 + y^2 \leq 2x$. Plantee la integral que da el área de la región *R*.

Solución:

En este caso, se dibujan primero las curvas de ecuaciones: $y = x$, $y = -x$ y $x^2 + y^2 = 2x$.

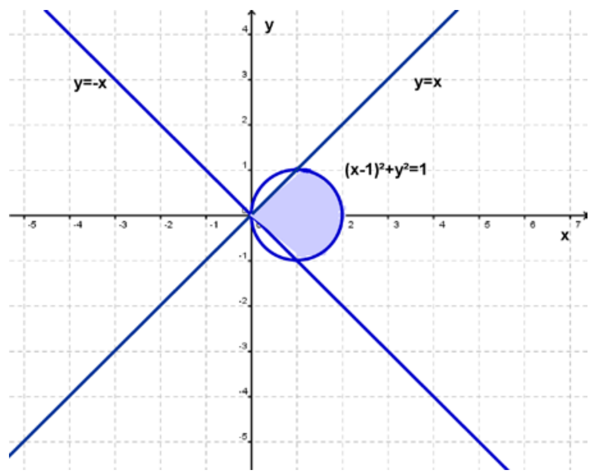
Observe que

$$x^2 + y^2 \leq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

Luego, los puntos del plano que satisfacen la desigualdad $x^2 + y^2 \leq 2x$ pertenecen a la circunferencia y al interior de la circunferencia.

Por otra parte, las coordenadas del punto $(2, 0)$ satisfacen las desigualdades $y \leq x$, $y \geq -x$.

En consecuencia, la región *R* es la sombreada en la figura anexa.



Ambas rectas intersecan a la circunferencia en dos puntos, cuyas coordenadas se deben determinar.

Intersección de la circunferencia con la recta de ecuación $y = x$

$$x^2 + x^2 = 2x \Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad x = 1$$

Puntos de corte: $P_1(0, 0)$ y $P_2(1, 1)$.

Por simetría los puntos de intersección de la circunferencia con la recta de ecuación $y = -x$ son: $P_1(0, 0)$ y $P_3(1, -1)$.

Por otra parte, observe que

$$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow y = \pm\sqrt{2x - x^2}$$

En consecuencia, el área *A* de *R* viene dada por:

$$A=\int_0^1\int_{-x}^{x} dy\,dx+\int_1^2\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} dy\,dx=2\int_0^1\int_0^x dydx+2\int_1^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy\,dx$$

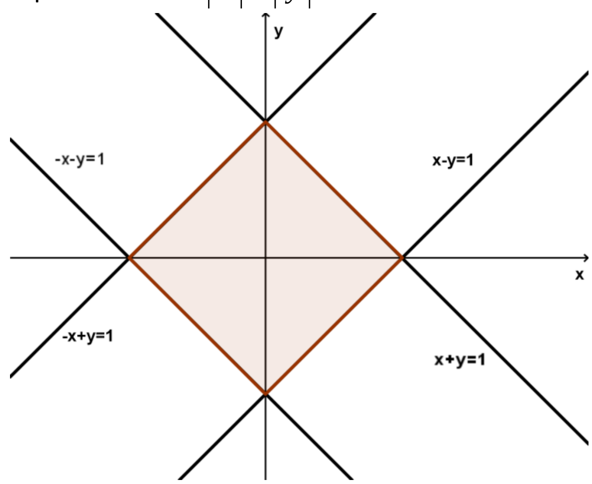
Nota: El problema también se puede resolver en coordenadas polares.

16. Sea *R* la región del plano definida por $R=\{(x,y)\in R^2 : |x|+|y|\le 1\}$. Plantee la integral que da el área de la región *R* y halle su valor.

Solución:

Para representar en el plano el conjunto de puntos que satisfacen $|x|+|y|\le 1$.
Se deben considerar los siguientes casos:

i) Si $x\ge 0$ y $y\ge 0$ se obtiene: $x+y\le 1$
ii) Si $x\ge 0$ y $y<0$ se obtiene: $x-y\le 1$
iii) Si $x<0$ y $y\ge 0$ se obtiene: $-x+y\le 1$
iv) Si $x<0$ y $y<0$ se obtiene: $-x-y\le 1$.



Al representar la unión de las regiones indicadas en i), ii) iii) y iv) se obtiene la región sombreada en la figura, que a su vez es 4 veces el área de uno de los triángulos obtenidos en cada uno de los 4 casos.

En consecuencia,

$$A=4\int_0^1\int_0^{1-x} dy\,dx=4\int_0^1 (1-x)dx=4\left(x-\frac{x^2}{2}\right)_0^1=4\cdot\frac{1}{2}=2$$

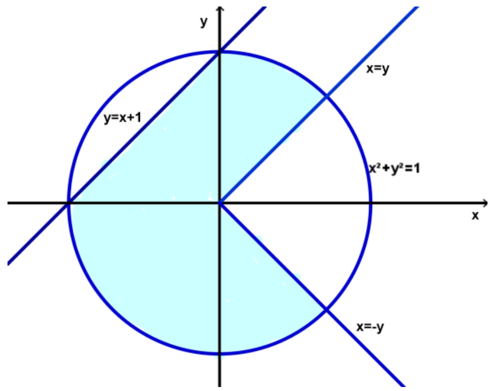
17. Sea *R* la región del plano acotada por las gráficas de $x^2+y^2=1$, $x=|y|$, $y=1+x$.

a) Grafique la región *R*

b) Plantee una integral doble para obtener el área de la región *R*, considerando los ordenes de integración *dxdy* y *dydx*.

Solución:

a) La región *R* se muestra sombreada en la figura siguiente:



b) Los puntos de intersección de la circunferencia con la recta de ecuación $y = x+1$ son $(-1,0)$ y $(0,1)$.

Para obtener los puntos de intersección de la circunferencia con la recta de ecuación $y = x$ se resuelve el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x \end{cases}, \quad y > 0$.

Al sustituir en la primera ecuación el valor de *y* dado en la segunda ecuación resulta

$$2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

Los puntos de intersección son $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, pero como $y > 0$ se considera $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Por simetría se obtiene que la circunferencia interseca a la recta de ecuación $x = -y$ en los puntos $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, y como $y < 0$ se considera $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Luego, el área se expresa como:

$$A = \int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1+x} dydx + 2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{x}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$$

O también

$$A = \int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} dxdy + \int_{0}^{1}\int_{y-1}^{0} dxdy + 2\left[\int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} dxdy + \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}\int_{0}^{-y} dxdy\right]$$

18. Calcule el área de la región *R* limitada por la curva de ecuación $y=\sqrt{-4-x}$, el eje x y la recta tangente a dicha curva en el punto en el cual $x=-8$, utilizando

a) Una integral simple **b**) Una integral doble.

Solución:

Sea *f* la función definida por $f(x)=\sqrt{-4-x}$.

Si $x=-8$ entonces $y=\sqrt{4}=2$, luego el punto es $P(-8,2)$.

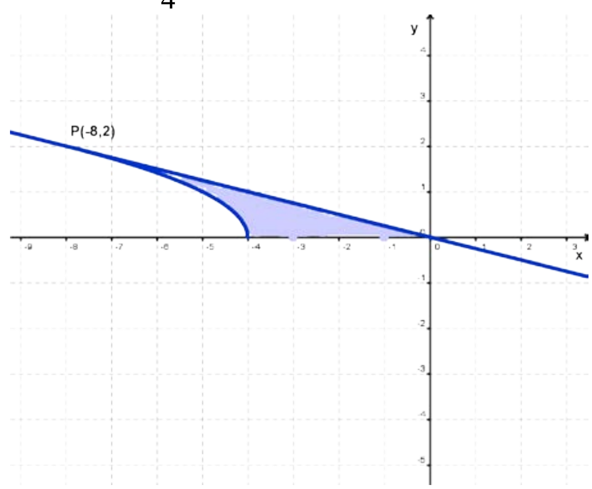
La pendiente de la recta tangente en P es $f\,'(-8)$.

$$f(x)=\sqrt{-4-x} \Rightarrow f\,'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{4-x}} \Rightarrow f\,'(-8)=-\frac{1}{4}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $P(-8,2)$ es

$$y-2=-\frac{1}{4}(x+8) \quad \text{ó} \quad y=-\frac{1}{4}x$$

La gráfica de la región *R* se muestra a continuación.



Por otra parte,

$$y=-\frac{1}{4}x \Rightarrow x=-4y$$

y

$$y=\sqrt{-4-x} \Rightarrow x=-4-y^2$$

Por lo tanto,

a) $A(R)=\int_0^2\left(-4y+4+y^2\right)dy=\dfrac{8}{3}$

b) $A(R)=\int_0^2\int_{-4-y^2}^{-4y}dx\,dy=\int_0^2\left[-4y+4+y^2\right]dy=\left[-2y^2+4y+\dfrac{y^3}{3}\right]_0^2=-8+8+\dfrac{8}{3}=\dfrac{8}{3}$

En consecuencia, el área *A* de la región *R* es $\dfrac{8}{3}$ unidades cuadradas.

19. El área *A* de una cierta región *D* del plano viene dada por: $A=\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+b} dy\,dx$; y su valor es $\frac{9}{2}$ unidades cuadradas.

a) Halle el valor de la constante *b*.
b) Grafique la región *D*.
c) Plantee la integral en el orden *dxdy*.

Solución:

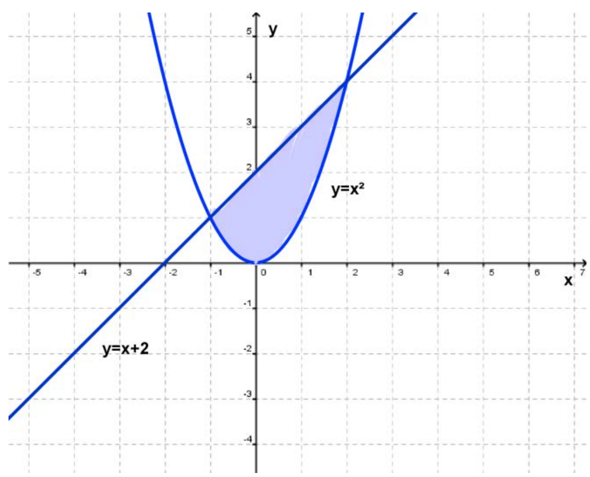
a) Para hallar el valor de la constante *b*, se debe primero resolver la integral,

$$A=\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+b} dy\,dx=\int_{-1}^{2}\left[x+b-x^2\right]dx=\left[\frac{x^2}{2}+bx-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=2+2b-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+b-\frac{1}{3}=-\frac{3}{2}+3b$$

Dado que $A=\frac{9}{2}$ se tiene que

$$-\frac{3}{2}+3b=\frac{9}{2}\Rightarrow 3b=6\Rightarrow b=2$$

b) Al sustituir el valor de *b* en la ecuación $y=x+b$ se obtiene que la región *D* de integración es la región del plano limitada por la recta de ecuación $y=x+2$ y la parábola de ecuación $y=x^2$ que se observa en la figura.



c) Para plantear la integral que da el área se determinar buscar los puntos de intersección de las curvas, es decir, se debe resolver el sistema $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+2 \end{cases}$.

$$x+2=x^2\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow (x+1)(x-2)=0\Rightarrow x=-1 \quad \text{ó} \quad x=2$$

$$x=-1\Rightarrow y=1 \quad \text{y} \quad x=2\Rightarrow y=4$$

La parábola y la recta se intersecan en los puntos $P_1\,(-1,1)\;P_2\,(2,4)$.

El área de la región *R* viene dada por

$$A=\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dx\,dy+\int_1^4\int_{y-2}^{\sqrt{y}}dx\,dy$$

20. Dada la integral $I=\int_0^1\int_{\sqrt{4-(y-2)^2}}^{\sqrt{4-y^2}}dxdy$

a) Dibuje la región *D* de integración.
b) Plantee la integral en el orden *dydx.*
c) Plantee la integral en coordenadas polares.
d) Determine el área de *D*.
e) Considere la región *D* como una lámina y determine la masa de la lámina *D* si la densidad superficial en cada punto $(x,y)\in D$ es $\delta(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Solución:

a) De la integral se obtiene que:

$$0\le y\le 1 \quad \text{y} \quad \sqrt{4-(y-2)^2}\le x\le\sqrt{4-y^2}$$

Para dibujar la región *D* de integración observe que:

$$x=\sqrt{4-y^2}\Rightarrow x^2=4-y^2\Rightarrow x^2+y^2=4$$

Y

$$\sqrt{4-(y-2)^2}=x\Rightarrow 4-(y-2)^2=x^2\Rightarrow x^2+(y-2)^2=4$$

Es decir, la *x* toma valores entre la rama derecha de la semicircunferencia de centro $(0,2)$, y radio 2 y la rama derecha de la semicircunferencia de centro $(0,0)$, y radio 2.

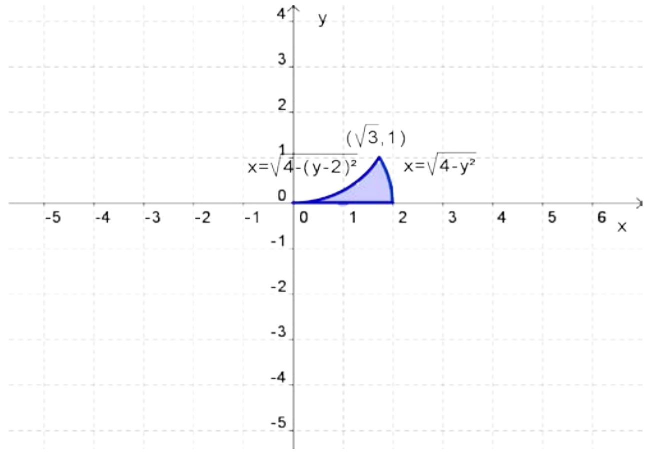
Para plantear la integral que da el área se deben buscar los puntos de intersección de las semicircunferencias, es decir, se debe resolver el sistema $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2+(y-2)^2=4 \end{cases}$

$$4-y^2=4-(y-2)^2\Rightarrow 4-4y=0\Rightarrow y=0 \quad \text{ó} \quad y=1$$

Luego,

$y=1\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$, y los puntos de intersección son $(-\sqrt{3},1)$ y $(\sqrt{3},1)$.

Como $0\le y\le 1$ la región sobre la cual se integra es la región sombreada en la figura.



b) La integral en el orden *dydx* es:

$$I=\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{2-\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx\;+\int_{\sqrt{3}}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

c) Para plantear la integral en coordenadas polares, se tiene que describir la región *D* en coordenadas polares, luego:

$$x^2+y^2=4\Rightarrow r^2=4\Rightarrow r=2$$

y

$$x^2+(y-2)^2=4\Rightarrow r^2\cos^2\theta+r^2\operatorname{sen}^2\theta-4r\operatorname{sen}\theta+4=4\Rightarrow r(r-4\operatorname{sen}\theta)=0$$

$$\Rightarrow r=0 \quad \text{ó} \quad r=4\operatorname{sen}\theta$$

Por otra parte,

$$4\operatorname{sen}\theta=2\Rightarrow \operatorname{sen}\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$$

La región D sobre la cual se integra puede ser descrita en coordenadas polares como:

$$D=\left\{(r,\theta)/\quad 4sen\theta\le r\le 2\quad \text{y}\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{6}\right\}$$

Por lo tanto,

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_{4sen\theta}^{2}\mathrm{r}\cdot\mathrm{r}\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\theta$$

d) $A(D)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_{4sen\theta}^{2}\mathrm{r}\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(4-16\operatorname{sen}^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-2(1-\cos 2\theta)\right)\mathrm{d}\theta=2\left[-\theta+2\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=$

$$=-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}.$$

En consecuencia, el área de la región D es $\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{3}$ unidades cuadradas.

e) La masa de la lámina D viene dada por $\iint\limits_D \delta(x,y)\,dA$, es decir que

$$M(D)=\int_0^1\int_{\sqrt{4-(y-2)^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_{4sen\theta}^{2} r^2\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(8-64\mathrm{sen}^3\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-8\mathrm{sen}^2\theta\mathrm{sen}\theta\right)\mathrm{d}\theta=\quad\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-8\mathrm{sen}\theta\left(1-\cos^2\right)\right)\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-8\mathrm{sen}\theta+8\mathrm{sen}\,\theta\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{8}{3}\left[\theta+8\cos\theta-\frac{8}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\frac{8}{3}\left[\frac{\pi}{6}+4\sqrt{3}-\sqrt{3}-8+\frac{8}{3}\right]=\frac{4\pi}{9}+8\sqrt{3}-\frac{128}{9}$$

21. Sea R la región definida por $R=\left\{(x,y)\in R^2 \,/\, x^2+y^2-4x\le 0 \quad y \quad x^2+y^2\ge 4\right\}$.

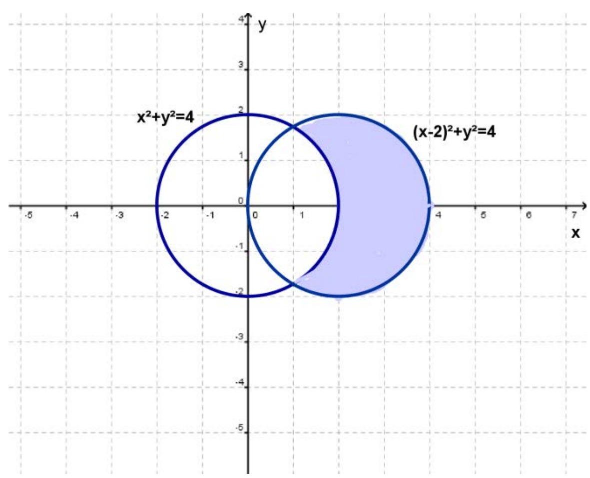
a) Dibuje la región R.
b) Exprese $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$ en el orden *dxdy.*
c) Exprese $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$ en el orden *dydx*.
d) Exprese $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$ en coordenadas polares.

Solución:

a) Observe que

$$x^2+y^2-4x\le 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2\le 4$$

Luego la región R es la región del plano que es interior a la circunferencia de ecuación $(x-2)^2+y^2=4$ y es exterior a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=4$, que se muestra sombreada en la figura.



b) Para establecer los límites de integración hay que determinar los puntos de intersección de las dos circunferencias, para ello se debe resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y^2 = 4 - x^2 \\ y^2 = 4x - x^2 \end{cases}$.

$$4 - x^2 = 4x - x^2 \Rightarrow 4 = 4x \Rightarrow x = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = -\sqrt{3} \quad \text{ó} \quad y = \sqrt{3}$$

Las circunferencias se intersecan en los puntos $\left(1, -\sqrt{3}\right)$ y $\left(1, \sqrt{3}\right)$.

Luego,

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-2}^{-\sqrt{3}} \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

c) $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dA = \int_1^2 \int_{-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-(x-2)^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_2^4 \int_{-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{\sqrt{4-(x-2)^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

d) Las ecuaciones de las circunferencias en coordenadas polares vienen dadas por

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow r^2 = 4r\cos\theta \Rightarrow r = 4\cos\theta$$

Por otra parte,

$$4\cos\theta = 2 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{ó} \quad \theta = -\frac{\pi}{3}$$

Luego,

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_2^{4\cos\theta} r\, f(r\cos\theta, r\,sen\,\theta)\,dr\,d\theta$$

22. Determine el jacobiano de la transformación: $x = e^r\, sen^2 t$, $y = e^{-r} \cos^2 t$

Solución:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial r} = \left(e^r sen^2 t\right)\left(-2e^{-r}\cos t\, sen\, t\right) - \left(2e^r sen\, t\cos t\right)\left(-e^{-r}\cos^2 t\right)$$

$$= -2sen^3 t\cos t + 2sen\, t\cos^3 t = 2\, sen\, t\cos t\left(\cos^2 t - sen^2 t\right) = sen(2t)\cos(2t) = \frac{1}{2}sen(4t)$$

23. Encuentre la imagen del conjunto *S* definido por $S = \{(u,v) / 0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 1\}$ bajo la transformación $x = 2u + v$, $y = u - v$. Dibuje el conjunto *S* y su imagen.

Solución:

Observe que *S* es un rectángulo, determinemos la imagen de cada lado:

a) Sean $0 \le u \le 2$ y $v = 0$

Al sustituir $v = 0$ en las ecuaciones de transformación resulta: $x = 2u$ y $y = u$, de donde $y = \dfrac{x}{2}$, con $0 \le x \le 4$.

b) Sean $0 \le u \le 2$ y $v = 1$

Al sustituir $v = 1$ en las ecuaciones de transformación resulta: $x = 2u + 1$ y $y = u - 1$, de donde $y = \dfrac{x-3}{2}$, con $1 \le x \le 5$.

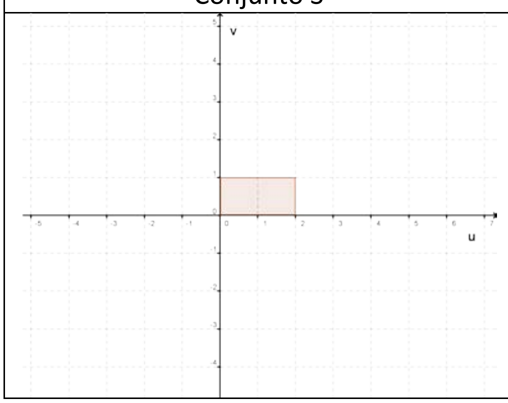
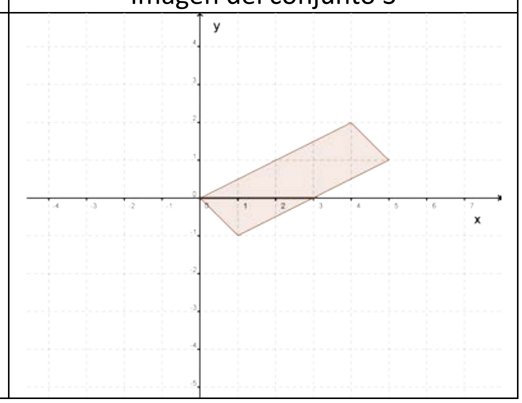
c) Sean $0 \le v \le 1$ y $u = 0$

Al sustituir $u = 0$ en las ecuaciones de transformación resulta: $x = v$ y $y = -v$, de donde $y = -x$, con $0 \le x \le 1$.

d) Sean $0 \le v \le 1$ y $u = 2$

Al sustituir $u = 2$ en las ecuaciones de transformación resulta: $x = 4 + v$ y $y = 2 - v$, de donde $y = 6 - x$, con $4 \le x \le 5$.

Las imágenes de ambos conjuntos se muestran a continuación.

Conjunto S	Imagen del conjunto S
	

24. Sea *R* el paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(1,-1)$, $(5,1)$ y $(4,2)$, use la transformación $x = \dfrac{2v-u}{3}$ y $y = \dfrac{u+v}{3}$ para calcular la integral $\iint\limits_R (x+y)\,dA$.

Solución:

Sea S la imagen de R mediante la transformación dada, se tiene que

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv$$

i) Calculemos el jacobiano de la transformación

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{3}$$

ii) Hallemos la imagen *S* de *R* mediante la transformación dada:

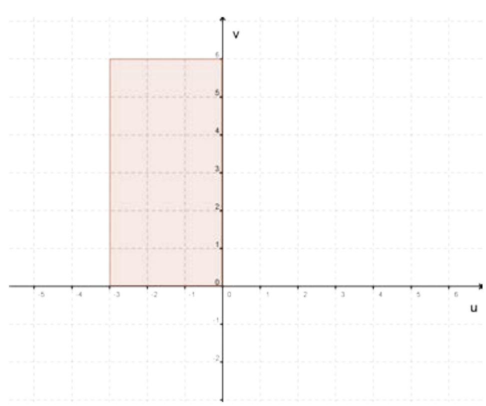
a) El segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(1,-1)$ están sobre la recta de ecuación $y=-x$, la cual se transforma en la recta $v=0$.

b) El segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(4,2)$ están sobre la recta de ecuación $y=\frac{x}{2}$, la cual se transforma en la recta $u=0$.

c) El segmento que une los puntos $(4,2)$ y $(5,1)$ están sobre la recta de ecuación $y=6-x$, la cual se transforma en la recta $v=6$.

d) El segmento que une los puntos $(5,1)$ y $(1,-1)$ están sobre la recta de ecuación $y=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$, la cual se transforma en la recta $u=-3$.

La imagen *S* de la región *R* es el rectángulo



iii) $\iint_R f(x,y)dA = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv = \int_{-3}^{0}\int_{0}^{6} \left(\frac{2v-u}{3} + \frac{u+v}{3} \right)\left(\frac{1}{3}\right) dv\, du$

$$=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}\int_{0}^{6} v\,dv\,du=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^6 du=\frac{1}{6}\cdot 36\int_{-3}^{0} du=6[u]_{-3}^{0}=18$$

25. Evalúe la integral $\iint_R \left(x^2+y^2\right)dA$ mediante un cambio de variable apropiado si *R* es el cuadrado de vértices $(2,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$ y $(0,-2)$.

Solución:

Los puntos $(2,0)$, $(0,2)$ quedan sobre la recta de ecuación $x+y=2$, ¿por qué?

Los puntos $(-2,0)$ y $(0,2)$ quedan sobre la recta de ecuación $y-x=2$, ¿por qué?

Los puntos $(-2,0)$ y $(0,-2)$ quedan sobre la recta de ecuación $x+y=-2$, ¿por qué?

Los puntos $(0,-2)$ y $(2,0)$ quedan sobre la recta de ecuación $x-y=2$, ¿por qué?

Si hacemos el cambio de variable $x+y=u$ y $y-x=v$, despejando *x* y *y* en términos de *u* y *v* se obtiene $x=\frac{u-v}{2}$ y $y=\frac{u+v}{2}$,

La recta de ecuación $x+y=2$ se transforma en $u=2$

La recta de ecuación $y-x=2$ se transforma en $v=2$

La recta de ecuación $x+y=-2$ se transforma en $u=-2$

La recta de ecuación $x-y=2$ se transforma en $v=-2$

La imagen de la región *R*, bajo la transformación dada es el cuadrado *S* de vértices $(2,2)$, $(-2,2)$, $(-2,-2)$ y $(2,-2)$.

Por otra parte $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

Por lo tanto,

$$\iint_R f(x,y)dA=\iint_S f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv=\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\left(\left(\frac{u-v}{2}\right)^2+\left(\frac{u+v}{2}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}\right)dv\,du$$

$$=\frac{1}{8}\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\left(2u^2+2v^2\right)dv\,du=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\left(u^2+v^2\right)dv\,du=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\left(u^2v+\frac{v^3}{3}\right)_{-2}^{2}du=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\left(4u^2+\frac{16}{3}\right)du=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{4}{3}u^3+\frac{16}{3}u\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{3}[(8+8)+(8+8)]=\frac{32}{3}$$

Problemas propuestos

En los problemas del 1 al 4 evalúe la integral planteada.

1. $\int_{1}^{2}\int_{1-x}^{\sqrt{x}} x^2 y\, dy\, dx$ **2.** $\int_{0}^{2}\int_{y^2}^{2y}\left(\dfrac{4x-y}{2}\right)dx\, dy$

3. $\int_{1}^{e}\int_{0}^{x} 2\ln x\, dy\, dx$ **4.** $\int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{y-4}{2}} dx\, dy$

Respuestas: **1)** $\dfrac{63}{40}$ **2)** $\dfrac{18}{5}$ **3)** $\dfrac{e^2+1}{2}$ **4)** $\dfrac{4}{3}$

En los problemas 5 y 6 invierta el orden de integración y evalúe la integral planteada.

5. $\int_{0}^{8}\int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \dfrac{1}{1+y^4}\, dy\, dx$ **6.** $\int_{0}^{1}\int_{2y}^{2} 4\cos\left(x^2\right)dx\, dy$

Respuestas: **5)** $\dfrac{\ln 17}{4}$ **6)** $\operatorname{sen} 4$

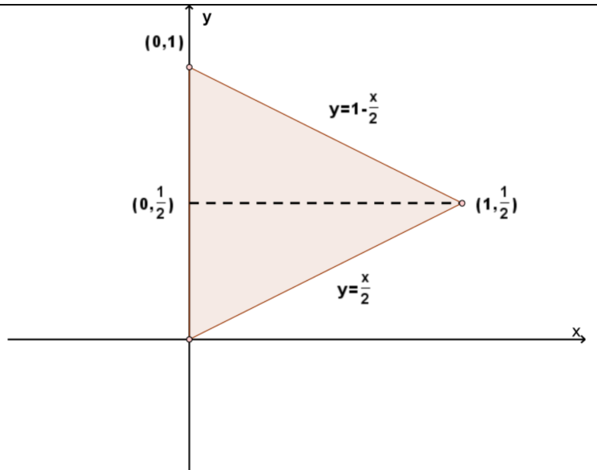
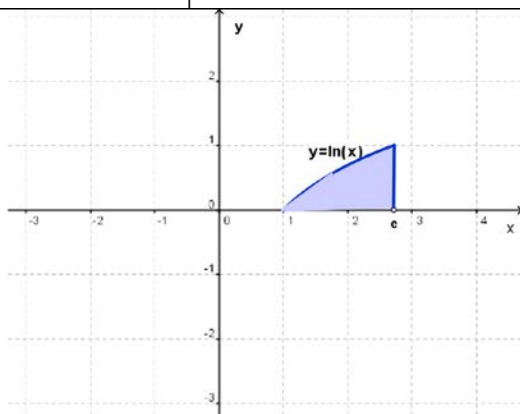
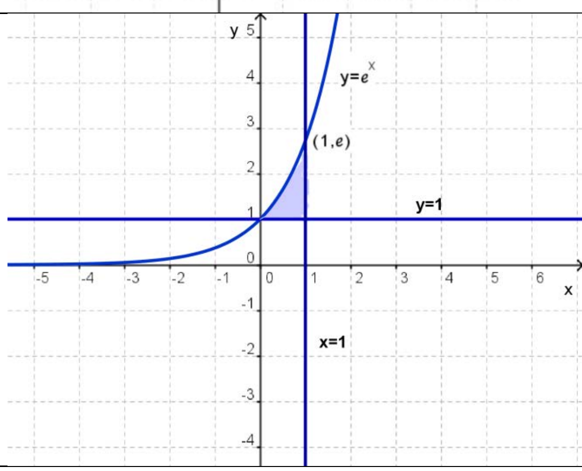
En los problemas del 7 al 12 dibuje la región de integración y escriba la integral equivalente en el orden de integración invertido.

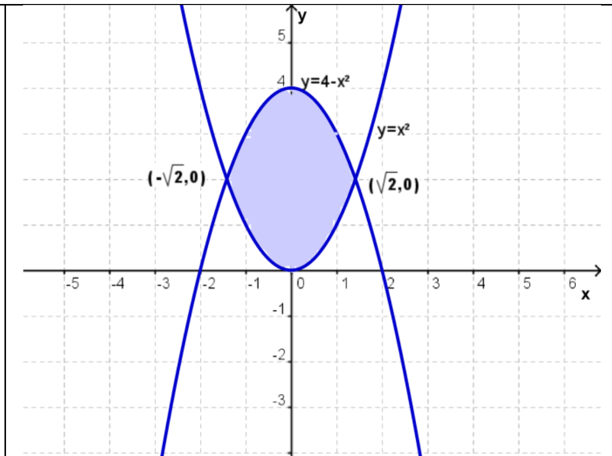
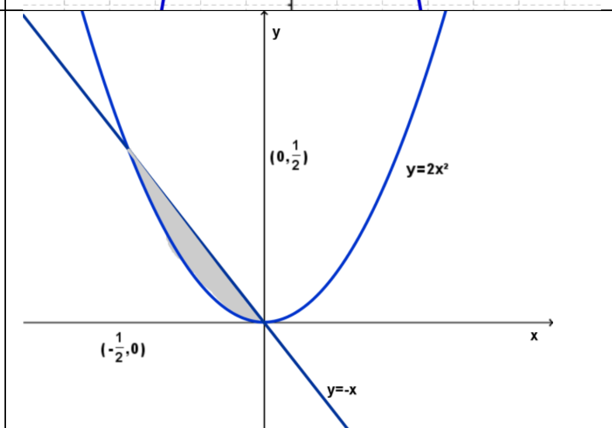
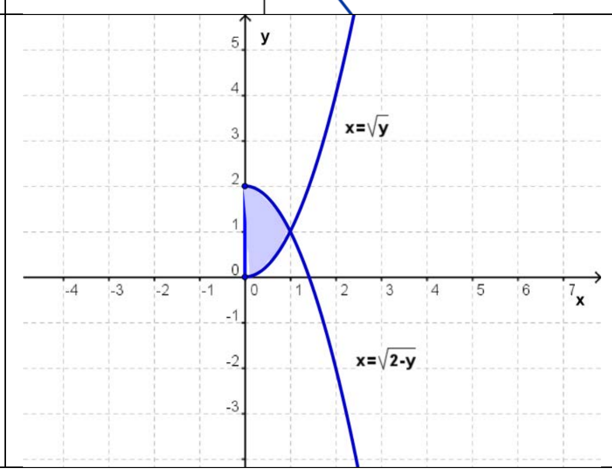
7. $I=\int_{0}^{1}\int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} f(x,y)\, dy\, dx$ **8.** $I=\int_{1}^{e}\int_{0}^{\ln x} f(x,y)\, dy\, dx$

9. $I=\int_{0}^{1}\int_{1}^{e^x}(x,y)\, dy\, dx$ **10.** $I=\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} g(x,y)\, dx\, dy+\int_{2}^{4}\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} g(x,y)\, dx\, dy$

11. $I=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{-y} f(x,y)\, dx\, dy$ **12.** $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx\, dy+\int_{1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\, dx\, dy$

Respuestas:

7)		$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{2y} f\left(x,y\right)dx\,dy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{2-2y} f\left(x,y\right)dx\,dy$
8)		$I=\int_0^1\int_{e^y}^{e} f\left(x,y\right)dx\,dy$
9)		$I=\int_1^e\int_{\ln y}^{1} f\left(x,y\right)dx\,dy$

10)		$I=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{x^2}^{4-x^2} g(x,y)\,dy\,dx$
11)		$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\int_{2x^2}^{-x} f(x,y)\,dy\,dx$
12)		$I=\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$

En los problemas del 13 al 18 dibuje la región de integración, plantee y calcule como una integral iterada.

13. $I=\iint_R (x+y)\,dA$ donde *R* es la región limitada por el trapecio de vértices $A(-1,1)$, $B(2,-1)$, $C(-1,4)$ y $D(2,4)$.

14. Halle $I=\iint_R xy\,dA$ donde *R* es la región limitada por el trapecio de vértices $A(-1,1)$, $B(1,0)$, $C(-1,-1)$ y $D(1,-1)$.

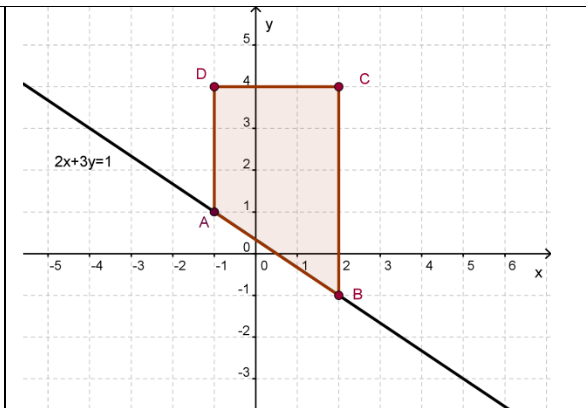
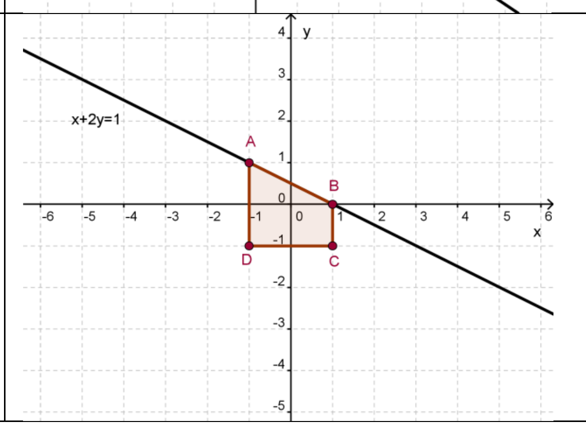
15. $I=\iint_D x\,dA$ donde *D* es la región triangular de vértices $A(2,3)$, $B(7,2)$ y $C(4,5)$.

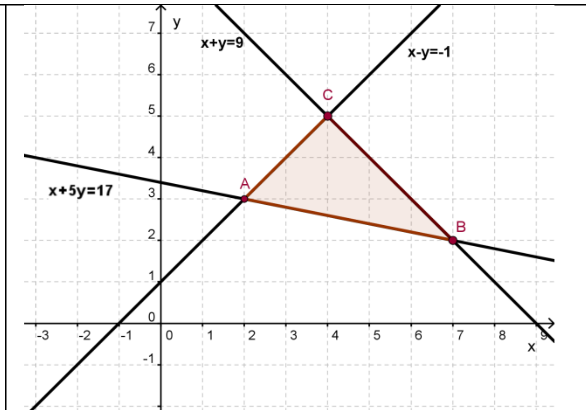
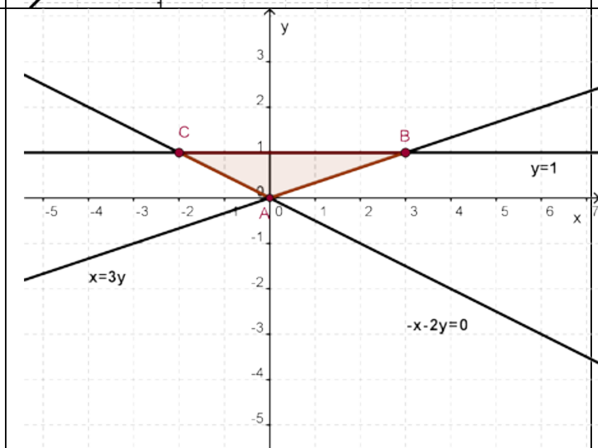
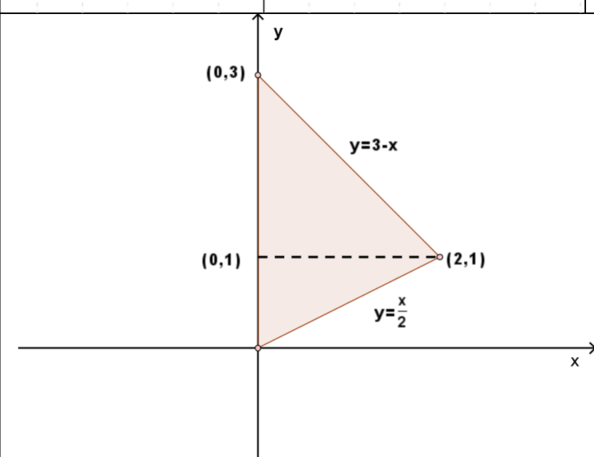
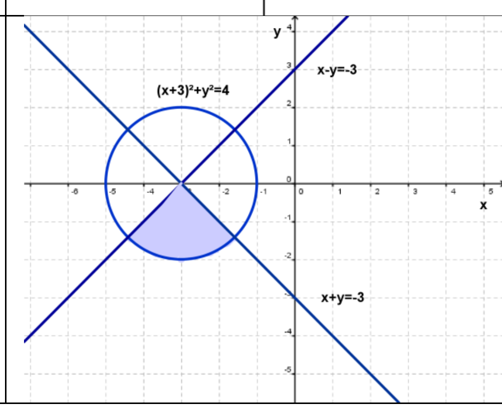
16. $I=\iint_D xy^2\,dA$ donde *D* es la región triangular de vértices $A(0,0)$, $B(3,1)$ y $C(-2,1)$.

17. $I=\iint_D dA$ donde *D* es la región triangular de vértices $A(0,0)$, $B(2,1)$ y $C(0,3)$.

18. $I=\iint_D dA$ donde *D* es la región del plano cuyos puntos satisfacen las desigualdades $x^2+y^2+6x+5\le 0$, $x-y+3\ge 0$ y $x+y+3\le 0$

Respuestas:

<table>
<tr><td>13)</td><td>
</td><td>$I=\int_{-1}^{2}\int_{\frac{1-2x}{3}}^{4}(x+y)\,dy\,dx=31$</td></tr>
<tr><td>14)</td><td>
</td><td>$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{\frac{1-x}{2}}xy\,dy\,dx=-\frac{1}{6}$</td></tr>
</table>

15)		$I=\int_{2}^{4}\int_{\frac{17-x}{5}}^{1+x} x\,dy\,dx+\int_{4}^{7}\int_{\frac{17-x}{5}}^{9-x} x\,dy\,dx=26$
16)		$I=\int_{-2}^{0}\int_{-\frac{x}{2}}^{1} xy^2\,dy\,dx+\int_{0}^{3}\int_{\frac{x}{3}}^{1} xy^2\,dy\,dx=\frac{1}{2}$
17)		$I=\int_{0}^{2}\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} dy\,dx=A(D)=3$
18)		$I=\int_{-3-\sqrt{2}}^{-3}\int_{-\sqrt{4-(x+3)^2}}^{x+3} dy\,dx+\int_{-3}^{-3+\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-(x+3)^2}}^{-3-x} dy\,dx$ $=A(D)=\pi$

En los problemas del 19 al 23 dibuje la región de integración, plantee la integral en coordenadas polares y determine su valor.

19. $I = \int_{-\pi}^{0} \int_{-\sqrt{\pi^2-x^2}}^{\sqrt{\pi^2-x^2}} xy\, dy\, dx + \int_{0}^{\pi} \int_{-\sqrt{\pi^2-x^2}}^{\sqrt{\pi^2-x^2}} xy\, dy\, dx$

20. $I = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2 + y^2\right) dy\, dx$

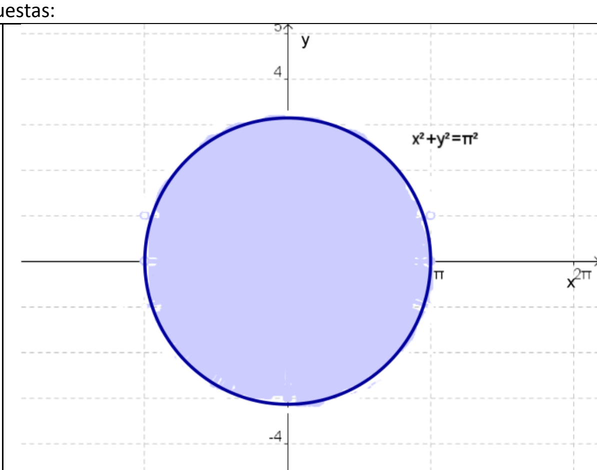
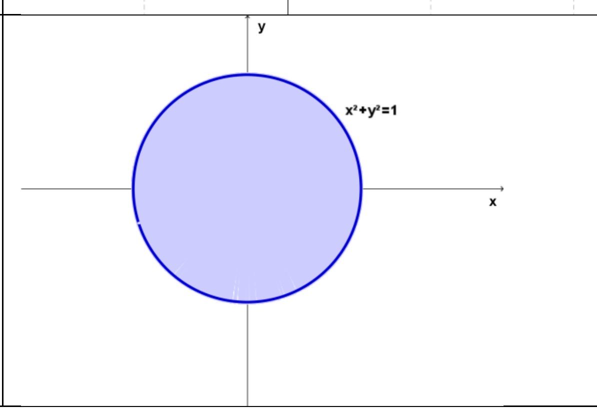
21. $I = \int_{0}^{2} \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} xy^2\, dx\, dy$

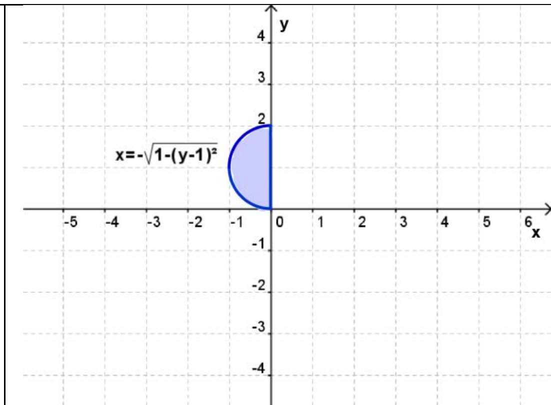
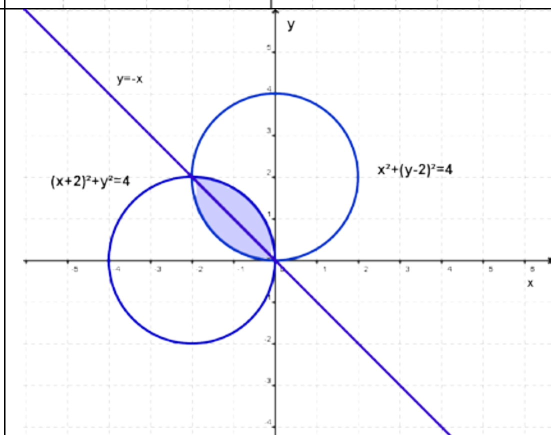
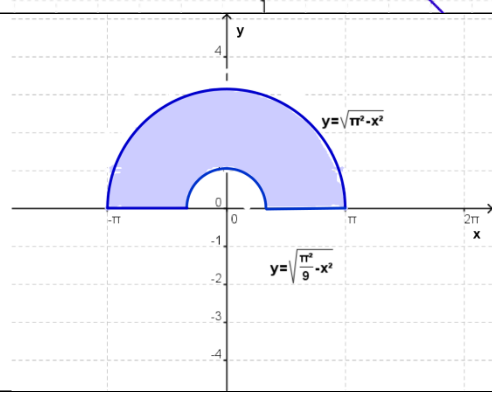
22. $I = \int_{-2}^{0} \int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{-4x-x^2}} dy\, dx$

23. *I* es la integral:

$$\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{3}} \int_{0}^{\sqrt{\pi^2-x^2}} \frac{\mathrm{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\sqrt{\frac{\pi^2}{9}-x^2}}^{\sqrt{\pi^2-x^2}} \frac{\mathrm{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \int_{0}^{\sqrt{\pi^2-x^2}} \frac{\mathrm{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

Respuestas:

19)		$I = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} \left(\mathrm{r}^2 \mathrm{sen}\,\theta \cos\theta\right) \mathrm{r}\, \mathrm{dr}\, \mathrm{d}\theta = 0$
20)		$I = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} r^2 \cdot r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$

21)		$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} \mathrm{r}^4 \cos\theta\, sen^2\theta \mathrm{dr}\, \mathrm{d}\theta=-\frac{4}{5}$
22)		$I=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\int_{0}^{4\,\mathrm{sen}\,\theta} \mathrm{rdr}\,\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_{0}^{-4\cos\theta} \mathrm{r}dr\, d\theta=2\pi-4$
23)		$I=\int_{0}^{\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \mathrm{senr}\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{2}$

En los problemas del 24 al 29 dibuje la región de integración, plantee la integral en coordenadas cartesianas y determine su valor.

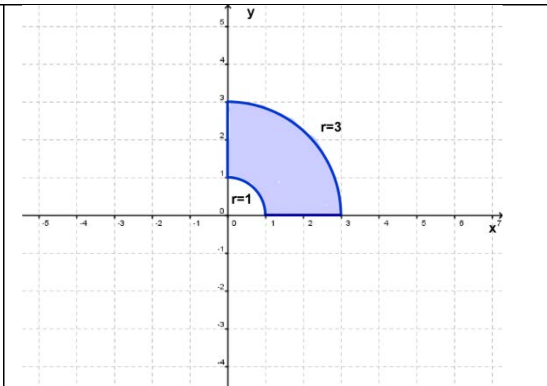
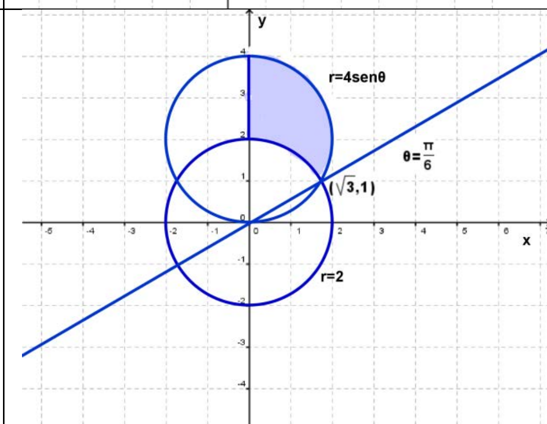
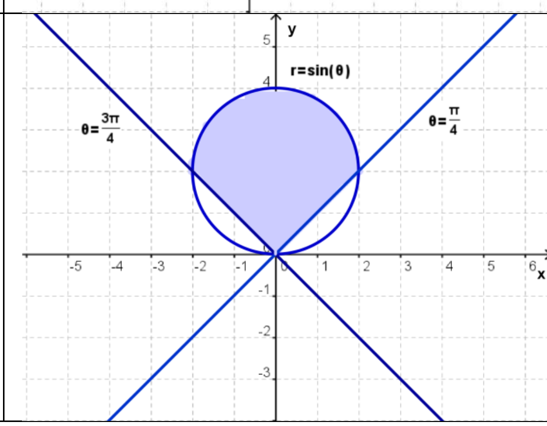
24. $I=\int_{1}^{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos\theta\, d\theta\, dr$ **25**. $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{2}^{4\,sen\,\theta} r\,\mathrm{dr}\,d\theta$

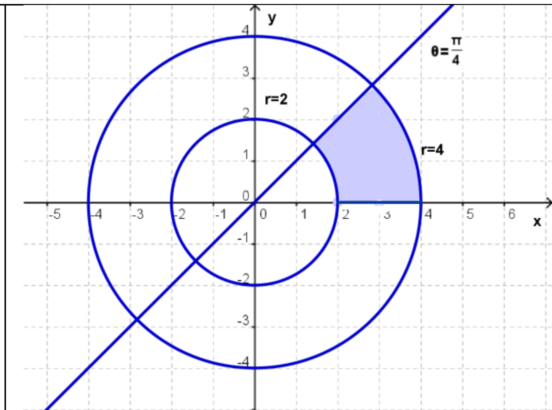
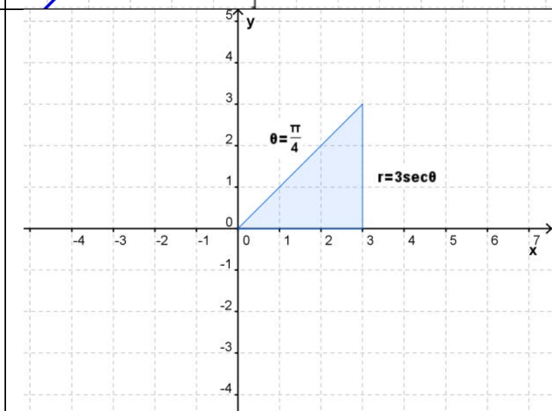
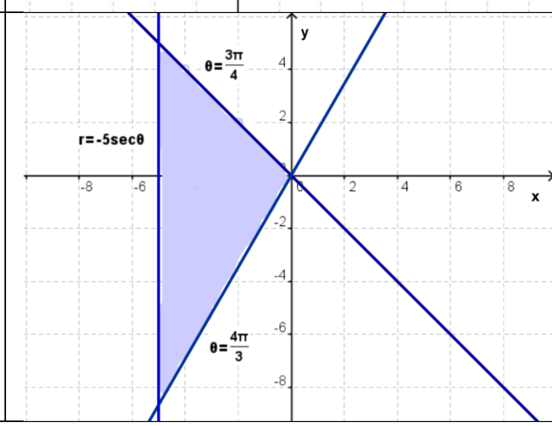
26. $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_{0}^{4\,sen\,\theta} r\,\mathrm{dr}\,d\theta$ **27**. $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{2}^{4} r^2\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{dr}\,d\theta$

28. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{3\sec\theta} r\, dr\, d\theta$

29. $I = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{4\pi}{3}} \int_0^{-5\sec\theta} 12r^3 sen^2\theta\, dr\, d\theta$

Respuestas:

24)		$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} x \; dy\, dx + \int_1^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} x\, dydx = \frac{26}{3}$
25)		$I = \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} dy\, dx + \int_{\sqrt{3}}^{2} \int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} dydx = \frac{2\pi}{3} +$
26)		$I = \int_0^2 \int_{-y}^{y} dx\, dy + \int_2^4 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} dx\, dy = 2\pi + 4$

27)		$I=\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{\sqrt{4-x^2}}^{x} y\,dy\,dx+\int_{2}^{2\sqrt{2}}\int_{0}^{x} y\,dy\,dx+\int_{2\sqrt{2}}^{4}\int_{0}^{\sqrt{16-x^2}} y\,dy\,dx=\frac{28}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$
28		$I=\int_{0}^{3}\int_{0}^{x} dy\,dx=\frac{9}{2}$
29)		$I=\int_{-5}^{0}\int_{\sqrt{3}x}^{-x} 12y^2dy\,dx=625\left(3\sqrt{3}+1\right)$

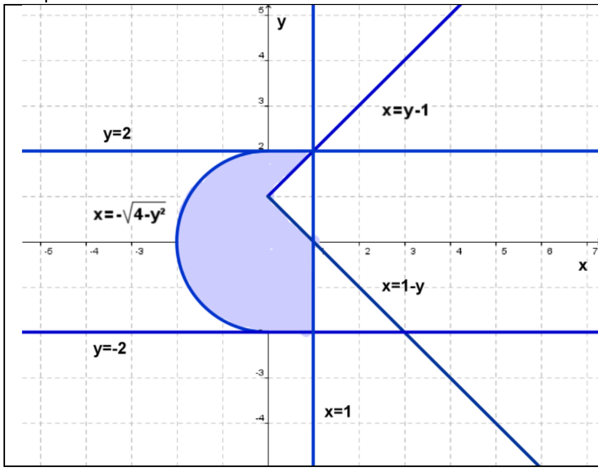
30. Sea *R* la región del plano acotada por las gráficas de $x+\sqrt{4-y^2}=0$, $x=\left|\,y-1\right|$, $x=1$, $y=2$, $y=-2$.

a) Grafique la región *R*.

b) Plantee dos integrales dobles en coordenadas cartesianas que den el área de la región *R*.

c) Determine el área de la región *R*.

Respuesta:



b) $A=\int_{-2}^{0}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dydx+\int_{0}^{1}\int_{-2}^{1-x} dydx+\int_{0}^{1}\int_{x+1}^{2} dydx$

$A=\int_{-2}^{0}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{1} dxdy+\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{1-y} dxdy+\int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{y-1} dxdy$

c) $A=3+2\pi$ unidades cuadradas

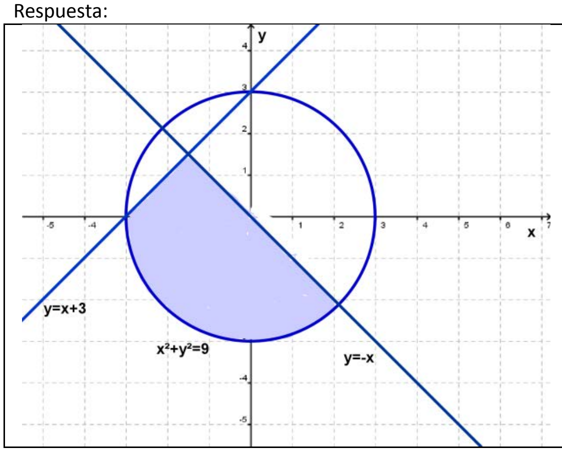
31. Sea *R* la región del plano cuyos puntos satisfacen las desigualdades $x^2+y^2\le 9$, $y\le x+3$ y $y\le -x$.

a) Grafique la región *R*.

b) Plantee dos integrales dobles en coordenadas cartesianas que den el área de la región *R*.

c) Determine el área de la región *R*.

Respuesta:



b) $A=\int_{-3}^{-\frac{3}{2}}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{x+3} dydx+\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{-x} dydx$

$A=\int_{-3}^{-\frac{3}{\sqrt{2}}}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dxdy+\int_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^{0}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-y} dxdy+\int_{0}^{\frac{3}{2}}\int_{3-y}^{-y} dxdy$

c) $A=\frac{9}{8}(3\pi+2)$ unidades cuadradas

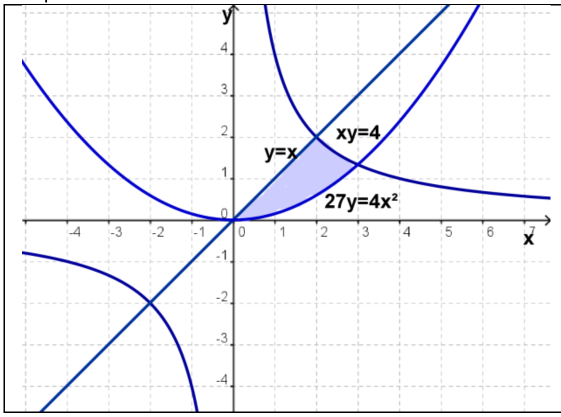
32. Sea *R* la región del plano cuyos puntos satisfacen las desigualdades $xy\le 4$, $y\le x$ y $27y\ge 4x^2$.

a) Grafique la región *R*.

b) Plantee dos integrales dobles en coordenadas cartesianas que den el área de la región *R*.

c) Determine el área de la región *R*.

Respuesta:

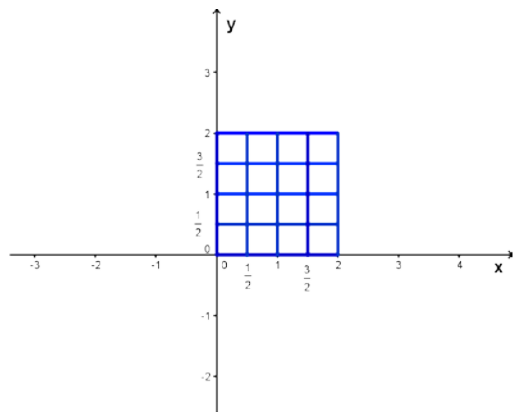


b) $A=\int_0^2 \int_{\frac{4x^2}{27}}^{x} dydx+\int_2^3 \int_{\frac{4x^2}{27}}^{\frac{4}{x}} dydx$

$A=\int_0^{\frac{4}{3}} \int_{y}^{\sqrt{\frac{27y}{4}}} dxdy+\int_{\frac{4}{3}}^{2} \int_{y}^{\frac{4}{y}} dxdy$

c) $A=\frac{2}{3}+4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ unidades cuadradas

33. Sea $f(x,y)=x^2+y$. Considere el rectángulo $\Omega=\{(x,y)\in R^2 \,/\, 0\le x\le 2 \quad \text{y} \quad 0\le y\le 2\}$. Subdivídalo en 16 subrectángulos como se indica en la figura. Considere el punto muestra $\left(x_i^*, y_i^*\right)$ como el centro de cada rectángulo.



a) Aproxime $\iint_\Omega f(x,y)\,dA$ por medio de una suma de Riemann.

b) Calcule $\iint_\Omega f(x,y)\,dA$ y compare el resultado con el obtenido en a).

c) ¿Qué ocurre con la aproximación de $\iint_\Omega f(x,y)\,dA$ se tienen 32 subrectángulos?

Respuesta: **a**) $\frac{37}{4}$ **b**) $\frac{28}{3}$ **c**) Se acercará más al valor exacto $\frac{28}{3}$

34. Calcule el área de la región limitada por las curvas de ecuaciones $x=9y^2-1$, $x=y^2+1$ utilizando

a) Una integral simple **b**) Una integral doble

Respuesta: **a**) $A=\frac{4}{3}$ **b**) $A=\frac{4}{3}$

35. Sea *R* la región rectangular de vértices: $(-2,0)$, $(1,0)$, $(-2,1)$ y $(1,1)$, suponga que la densidad en cada punto $(x,y)\in R$ es $\delta(x,y)=y$. Halle la masa de *R*.

Respuesta: $m=\frac{3}{2}$

36. Se considera una lámina triangular de vértices los puntos $A(0,0)$, $B(0,1)$ y $C(2,1)$, si la función densidad de masa de lámina está definida por $\delta(x, y) = e^{y^2}$, halle su masa.

Respuesta: $m = e - 1$

37. Se considera una lámina *F* limitada por las curvas de ecuaciones $y = x^2$ y $x = y^2$, si la función densidad de masa de lámina está definida por $\delta(x, y) = 3y$, halle su masa.

Respuesta: $m = \dfrac{9}{20}$

38. Se considera una lámina *F* limitada por las curvas de ecuaciones $x = 2 + y$ y $x = y^2$, si la función densidad de masa de lámina está definida por $\delta(x, y) = x^2 y^2$, halle su masa.

Respuesta: $m = \dfrac{207}{10}$

39. Sea *R* la circunferencia unitaria, y supón que la densidad en cada punto $(x, y) \in R$ es $\delta(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Halle las coordenadas del centro masa de *R*.

Respuesta: $x_M = y_M = 0$

40. Calcule mediante integrales dobles el volumen del sólido limitado superiormente por el plano de ecuación $z = 4x$ y que se encuentra limitado inferiormente por el círculo de ecuación $x^2 + y^2 = 16$ del plano *xy*.

Respuesta: $\dfrac{512}{3}$ unidades cúbicas.

41. Calcule mediante integrales dobles el volumen de la porción del sólido del primer octante limitado por la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Respuesta: $\dfrac{125}{6}\pi$ unidades cúbicas.

42. Exprese como una integral de la forma $\iint\limits_R f(y,z)\,dy\,dz$ el volumen del sólido limitado por el elipsoide de ecuación $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{25} = 1$

Respuesta: $V = 8\int_0^5 \int_0^{3\sqrt{1-\frac{z^2}{25}}} 2\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{25}}\, dydz$ unidades cúbicas

En los problemas del 43 al 46 halle el jacobiano de la transformación $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ para el cambio de variable dado.

43. $x = uv$, $y = uv - v$ **44**. $x = \dfrac{u}{v}$, $y = u + v$

45. $x = u\cos v\ ,\ y = v\cos u$ **46**. $x = \sqrt{uv}\ ,\ \ y = u - v$

Respuestas: 43) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -v$ 44) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{u+v}{v^2}$ 45) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \cos u\cos v - uv\,sen u\ sen v$

46) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\dfrac{u+v}{2\sqrt{uv}}$

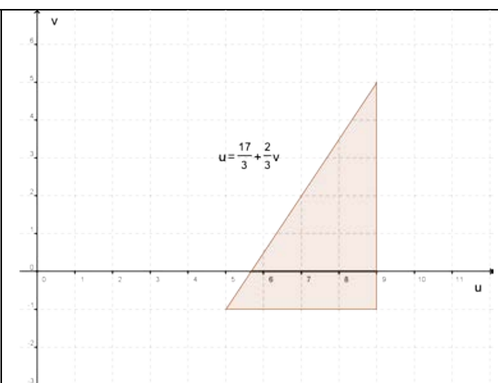
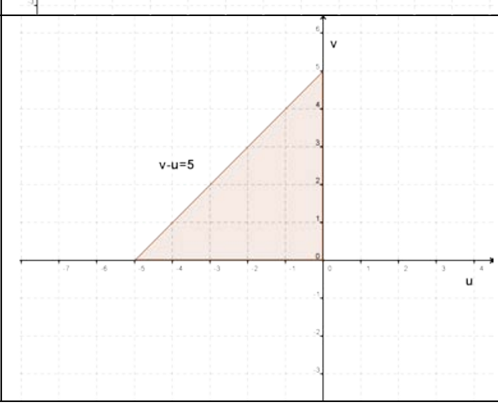
En los problemas del 47 al 49 dibuje la imagen *S* de la región de integración dada mediante el cambio de variable indicado. Plantee y resuelva la integral doble usando la transformación.

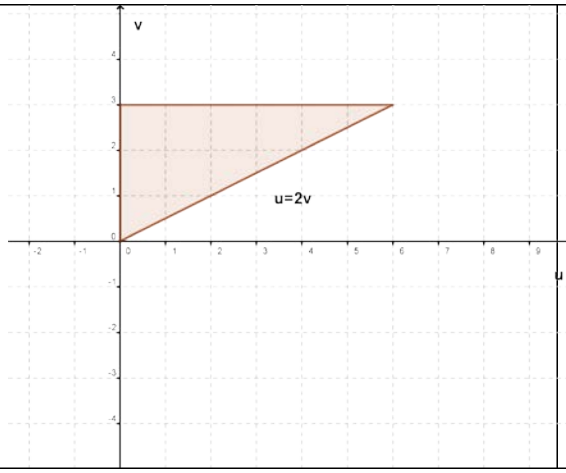
47. $I = \iint\limits_D x\,dA$ donde *D* es la región triangular de vértices $A(2,3)$, $B(7,2)$ y $C(4,5)$; $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$

48. $I = \iint\limits_D y\,dA$ donde *D* es la región triangular de vértices $A(0,0)$, $B(3,1)$ y $C(-2,1)$; $x = \dfrac{3v+2u}{5}$, $y = \dfrac{v-u}{5}$.

49. $I = \iint\limits_D dA$ donde *D* es la región triangular de vértices $A(0,0)$, $B(2,1)$ y $C(0,3)$; $x = \dfrac{2v-u}{3}$, $y = \dfrac{u+v}{3}$

Respuestas:

47)		$I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_5^9 \int_{-1}^{\frac{3u-17}{2}} \dfrac{u+v}{2}\,dv\,du = 26$
48)		$I = \dfrac{1}{5}\displaystyle\int_{-5}^{0} \int_{0}^{5+u} \dfrac{v-u}{5}\,dv\,du = \dfrac{5}{3}$

49)		$I=\frac{1}{3}\int_0^6\int_{\frac{u}{2}}^{3} dv\,du=\frac{1}{3}A(S)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}3\cdot 6=3$

50. Indique un cambio de variable apropiado para calcular la integral $I=\iint_D \frac{x-2y}{3x-y}dA$, donde *D* es el paralelogramo limitado por las rectas de ecuaciones $y=\frac{x}{2}$, $x=4+2y$, $y=3x-1$, $y=3x-8$ y determine su valor.

Respuesta: $x=\frac{2v-u}{5}$, $y=\frac{-3u+v}{5}$, $I=\frac{24}{5}\ln 2$

COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

Definiciones, propiedades y teoremas importantes

Definición 6.1: Las coordenadas cilíndricas de un punto *P* del espacio son (r,θ,z) en donde *r* y θ son las coordenadas polares para la proyección vertical de *P* sobre el plano *xy*, y *z* es la coordenada vertical rectangular.

Teorema 6.1: Las coordenadas cilíndricas (r,θ,z) de un punto *P* del espacio están relacionadas con las coordenadas rectangulares $(x,\mathrm{y},\mathrm{z})$ de ese punto como sigue:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

Definición 6.2: Las coordenadas esféricas de un punto *P* del espacio son (ρ,θ,ϕ) donde ρ es la distancia de *P* al origen, ϕ es el ángulo que forma $\overrightarrow{OP}$ con el semieje positivo *z* y θ es el ángulo de las coordenadas cilíndricas.

Teorema 6.2: Las coordenadas esféricas (ρ,θ,ϕ) de un punto *P* del espacio están relacionadas con las coordenadas rectangulares $(x,\mathrm{y},\mathrm{z})$ de ese punto como sigue:

$$x = \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad z = \rho\cos\phi \qquad \text{con} \quad \rho \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{y} \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z_2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Problemas resueltos

1. Determine dos coordenadas cilíndricas del punto cuyas coordenadas cartesianas son $(0,4,4)$.

Solución:

Las coordenadas cilíndricas del punto tienen la forma (r,θ,z), donde:

$$r=\sqrt{4^2+0^2}=\sqrt{16}=4$$

Por otra parte,

$$\begin{cases} 0=4\cos\theta \\ 4=4\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \cos\theta=0 \quad y \quad \operatorname{sen}\theta=1 \Rightarrow \ \theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \quad k\in Z$$

Luego dos coordenadas cilíndricas son: $\left(4,\frac{\pi}{2},4\right)$ y $\left((4,-\frac{3\pi}{2},4)\right)$.

2. Identifique, dibuje y halle una ecuación en coordenadas cilíndricas del lugar geométrico cuya ecuación en coordenadas cartesianas es $z=x^2+y^2-2$.

Solución:

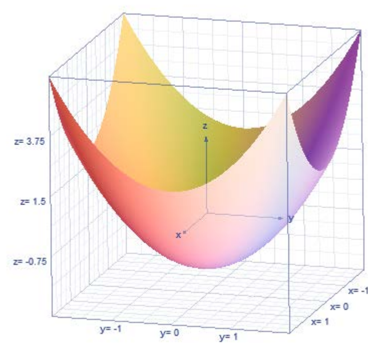
La ecuación $z=x^2+y^2-2$ corresponde a la ecuación del paraboloide mostrado en la figura.

Al sustituir las ecuaciones $x=r\cos\theta$ y $y=r\operatorname{sen}\theta$ en la ecuación

$$z=x^2+y^2-2$$

se obtiene la ecuación

$$z=r^2-2$$

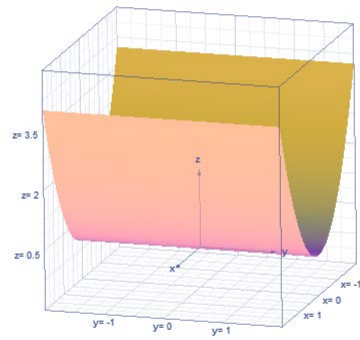


3. Halle una ecuación en coordenadas cartesianas del lugar geométrico cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es $z=r^2\cos^2\theta$ y dibuje su gráfica.

Solución:

Como $x=r\cos\theta$ se tiene que $x^2=r^2\cos^2\theta$

Luego, la ecuación en coordenadas cartesianas es $z=x^2$, que corresponde al cilindro parabólico mostrado en la figura



4. Determine unas coordenadas esféricas del punto cuyas coordenadas rectangulares son $(2,-2,-2)$.

Solución:

Las coordenadas esféricas del punto cuyas coordenadas rectangulares son $(2,-2,-2)$ son de la forma (ρ,θ,Φ), donde:

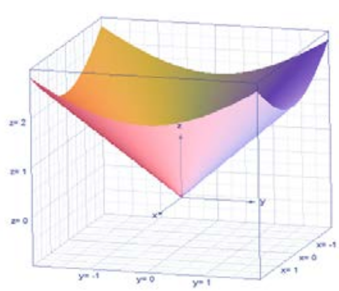
$$\rho=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}\,,\quad \tan\theta=\frac{-2}{2}=-1\,,\quad \theta=-\frac{\pi}{4}\quad \text{y}\quad \cos\Phi=\frac{-2}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \Phi=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Luego unas coordenadas esféricas del punto dado son: $\left(2\sqrt{3}\,,-\frac{\pi}{4},\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

5. Identifique, dibuje y halle una ecuación en coordenadas esféricas del lugar geométrico cuya ecuación en coordenadas rectangulares es $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Solución:

La ecuación $z=\sqrt{x^2+y^2}$ corresponde a la ecuación de la parte superior del cono mostrado en la figura.



Al sustituir las ecuaciones

$x = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$, $y = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$ y $z = \rho\cos\phi$ en la ecuación

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2$$

De donde

$$\rho^2 \cos^2\phi = \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\, sen^2\phi + \rho^2\cos^2\theta\, sen^2\phi$$

Operando se obtiene

$$\rho^2\cos^2\phi = \rho^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\phi + \rho^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\phi \Rightarrow \rho^2\cos^2\phi = \rho^2\operatorname{sen}^2\phi\left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right)$$

$$\Rightarrow \rho^2\cos^2\phi = \rho^2 sen^2\phi \Rightarrow \rho^2\left(\cos^2\phi - sen^2\phi\right) = 0 \Rightarrow \rho = 0 \quad \text{ó} \quad \cos^2\phi - sen^2\phi = 0$$

$$\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi = 0 \Leftrightarrow \cos^2\phi = \operatorname{sen}^2\phi \Leftrightarrow \tan^2\phi = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

Además como la solución $\rho = 0$ queda contenida en $\phi = \frac{\pi}{4}$, se tiene que la ecuación en coordenadas esféricas de cono dado es $\phi = \frac{\pi}{4}$.

6. Halle una ecuación en coordenadas cartesianas del lugar geométrico cuya ecuación en coordenadas esféricas es $\rho = 3csc\phi$ y dibuje su gráfica.

Solución:

Observe que

$$\rho = 3csc\phi \Rightarrow \rho = \frac{3}{\operatorname{sen}\ \phi} \Rightarrow \rho\operatorname{sen}\phi = 3$$

De las ecuaciones

$$x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi,\ y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$$

resulta:

$$\frac{y}{\operatorname{sen}\theta} = \rho\operatorname{sen}\phi \ \text{ y } \ \frac{x}{\cos\theta} = \rho\operatorname{sen}\phi,\ \operatorname{sen}\theta \neq 0 \ \text{ y } \ cos\,\theta \neq 0$$

Como

$$\rho\operatorname{sen}\phi = 3$$

Se tiene que

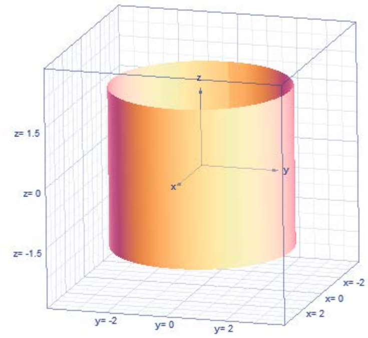
$$\frac{y}{\operatorname{sen}\theta} = \rho\operatorname{sen}\phi \ \text{ y } \ \frac{x}{\cos\theta} = \rho\operatorname{sen}\phi \Rightarrow \frac{y}{\operatorname{sen}\theta} = 3 \ \text{ y } \ \frac{x}{\cos\theta} = 3 \Rightarrow y^2 + x^2 = 9\operatorname{sen}^2\theta + 9\cos^2\theta = 9$$

Por lo tanto,

La ecuación en coordenadas cartesianas es

$$y^2 + x^2 = 9$$

La cual corresponde al cilindro de eje *z* mostrado en la figura.



Problemas propuestos

En los problemas del 1 al 5 determine las coordenadas cartesianas del punto cuyas coordenadas cilíndricas se da.

1. $\left(5,\dfrac{\pi}{2},3\right)$ **2.** $\left(6,\dfrac{\pi}{3},-5\right)$ **3.** $\left(-2,-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ **4.** $\left(-\sqrt{3},\pi,\sqrt{2}\right)$ **5.** $\left(1,\dfrac{7\pi}{4},8\right)$

Respuestas: **1)** $(0,5,3)$ **2)** $\left(3,3\sqrt{3},-5\right)$ **3)** $\left(0,2,\dfrac{1}{2}\right)$ **4)** $\left(\sqrt{3},0,\sqrt{2}\right)$ **5)** $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},8\right)$

En los problemas del 6 al 10 determine unas cilíndricas del punto cuyas coordenadas cartesianas se da.

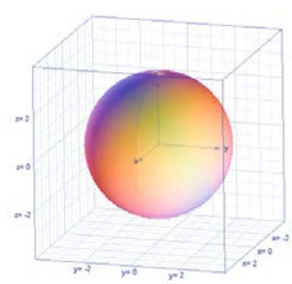
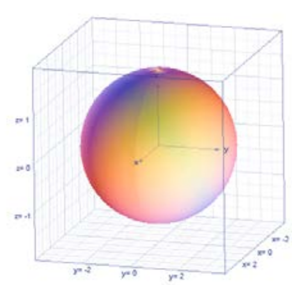
6. $\left(2,2\sqrt{3},1\right)$ **7.** $(0,-2,1)$ **8.** $\left(3\sqrt{3},3,-2\right)$ **9.** $\left(-2,-2\sqrt{3},-8\right)$ **10.** $\left(0,-5,\sqrt{7}\right)$

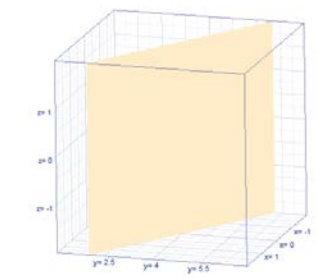
Respuestas: **6)** $\left(4,\dfrac{\pi}{3},1\right)$ **7)** $\left(2,\dfrac{3\pi}{2},1\right)$ **8)** $\left(6,\dfrac{\pi}{6},-2\right)$ **9)** $\left(4,\dfrac{4\pi}{3},-8\right)$ **10)** $\left(5,\dfrac{3\pi}{2},\sqrt{7}\right)$

En los problemas del 11 al 13 identifique, dibuje la superficie y halle una ecuación en coordenadas cilíndricas, de la ecuación está dada en coordenadas cartesianas.

11. $x^2+y^2+z^2=9$ **12.** $x^2+y^2+4z^2=10$ **13.** $x+y=4$

Respuestas:

11) Ecuación de una esfera		$r^2+z^2=9$
12) Ecuación de un elipsoide		$r^2+4z^2=10$

13) Ecuación de un plano		$r = \dfrac{4}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$

En los problemas del 14 al 16 halle la ecuación en coordenadas cartesianas, de la ecuación está dada en coordenadas cilíndricas.

14. $r^2 \cos 2\theta = z$ **15**. $r = 4\operatorname{sen}\theta$ **16**. $2r\cos\theta + 3r\operatorname{sen}\theta + 4z = 1$

Respuestas: **14**) $x^2 - y^2 = z$ **15**) $x^2 + (y-2)^2 = 4$ **16**) $2x + 3y + 4z = 1$

En los problemas del 17 al 21 determine las coordenadas cartesianas del punto cuyas coordenadas esféricas se da.

17. $\left(5, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ **18**. $(1, \pi, 0)$ **19**. $\left(2\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ **20**. $\left(2, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ **21**. $\left(10, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Respuestas: **17**) $\left(\dfrac{5\sqrt{6}}{4}, \dfrac{5\sqrt{2}}{4}, \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ **18**) $(0, 0, 1)$ **19**) $\left(1, \sqrt{3}, -2\right)$ **20**) $\left(1, 1, \sqrt{2}\right)$ **21**) $\left(-5\sqrt{3}, 5, 0\right)$

En los problemas del 22 al 26 determine unas esféricas del punto cuyas coordenadas cartesianas se da.

22. $\left(\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ **23**. $\left(0, 2\sqrt{3}, 2\right)$ **24**. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}, -\sqrt{3}\right)$ **25**. $(0, 5, 0)$ **26**. $\left(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3}\right)$

Respuestas: **22**) $\left(4, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ **23**) $\left(4, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ **24**) $\left(\sqrt{6}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ **25**) $\left(5, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ **26**) $\left(4, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right)$

En los problemas del 27 al 29 halle una ecuación en coordenadas esféricas, de la ecuación está dada en coordenadas cartesianas.

27. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ **28**. $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$ **29**. $x^2 + y^2 = 9$

Respuestas: **27**) $\rho = 5$ **28**) $\tan^2 \phi = 4$ **29**) $\rho \operatorname{sen}\phi = 3$

En los problemas del 30 al 32 halle la ecuación en coordenadas cartesianas, de la ecuación está dada en coordenadas esféricas.

30. $\rho = 4\cos\phi$ **31**. $\rho\,\text{sen}\phi = 2\cos\theta$ **32**. $\rho^2\left(1-\text{sen}^2\phi\,\text{sen}^2\theta\right)=16$

Respuestas: **30**) $x^2+y^2+(z-2)^2=4$ **31**) $(x-1)^2+y^2=1$ **32**) $x^2=16-z^2$

33. Transforme la ecuación $r^2+2z^2=4$ dada en coordenadas cilíndricas a coordenadas esféricas.

Respuesta: $\rho^2=\dfrac{4}{1+\cos^2\phi}$

34. Transforme la ecuación $\rho=\dfrac{1}{3}\csc\phi\cot\phi$ dada en coordenadas esféricas a coordenadas cilíndricas.

Respuesta: $z=3r^2$

35. El jacobiano de la transformación *T* dado por $x=g(u,v,w)$, $y=h(u,v,w)$, $z=f(u,v,w)$, denotado por $J(u,v,w)$, se define como

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}-\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}-\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}$$

a) Determine el jacobiano de la transformación para coordenadas cilíndricas: $x=r\cos\theta$, $y=r\,\text{sen}\,\theta$, $z=z$

b) Determine el jacobiano de la transformación para coordenadas esféricas: $x=\rho\cos\theta\,\text{sen}\,\phi$, $y=\rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$ y $z=\rho\cos\phi$

Respuesta: a) $J(r,\theta,z)=r$ b) $J(\rho,\theta,\phi)=\rho^2\,\text{sen}\,\phi$

INTEGRALES TRIPLES

Definiciones, propiedades y teoremas importantes

Teorema 7.1: Sea f una función real de tres variables reales continua en $\Omega \subset R^3$, si

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 / (x, y) \in D, \quad g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

con g_1 y g_2 funciones continuas en D. Entonces

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dV = \iint_{D} \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

Teorema 7.2: Sea f una función real de tres variables reales continua en $\Omega \subset R^3$, si

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 / (x, z) \in D, \quad h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z)\}$$

con h_1 y h_2 funciones continuas en D. Entonces,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dV = \iint_{D} \left[\int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy \right] dA$$

Teorema 7.3: Sea f una función real de tres variables reales continua en $\Omega \subset R^3$, si

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 / (y, z) \in D, \quad w_1(y, z) \leq x \leq w_2(y, z)\}$$

con w_1 y w_2 funciones continuas en D. Entonces,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dV = \iint_{D} \left[\int_{w_1(y,z)}^{w_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx \right] dA$$

Teorema 7.4: Supongamos que $\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dV$ y $\iiint_{\Omega} g(x, y, z)\, dV$ existen sobre una región Ω. Entonces

- $\iiint_{\Omega} [f(x, y, z) + g(x, y, z)]\, dV = \iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dV + \iiint_{\Omega} g(x, y, z)\, dV$

- $\iiint_{\Omega} c\, f(x,y,z)\, dV = c \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, dV$, para toda constante *c*.

- Si $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$ para toda $(x,y,z) \in \Omega$ entonces

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, dV \leq \iiint_{\Omega} g(x,y,z)\, dV$$

- Si Ω es la unión de dos regiones que no se solapan Ω_1 y Ω_2, entonces $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, dV =$ $\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\, dV + \iiint_{\Omega_2} f(x,y,z)\, dV$.

- $\iiint_{\Omega} dV = V(\Omega)$ (donde $V(\Omega)$ denota el volumen de la región Ω)

- Si $m \leq f(x,y,z) \leq M$ para toda $(x,y,z) \in \Omega$ entonces

$$m \cdot V(\Omega) \leq \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, dV \leq m \cdot V(\Omega)$$

Teorema 7.5: Sea f una función real de tres variables reales continua en $\Omega \subset R^3$, si

$$\Omega = \{(x,y,z)/(x,y) \in D, \quad g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\}$$

donde *D* está dado en coordenadas polares por

$$D = \{(r,\theta)/\, \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

Entonces

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{g_1(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)}^{g_2(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)} f\,(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

Teorema 7.6: Sea f una función real de tres variables reales continua en $\Omega \subset R^3$, si Ω es una región dada en coordenadas esféricas por:

$$\Omega = \{(\rho,\theta,\phi)/,\, \alpha \leq \theta \leq \beta,\, c \leq \Phi \leq d,\, g_1(\theta,\phi) \leq \rho \leq g_2(\theta,\phi)\}$$

Entonces

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{c}^{d} \int_{g_1(\theta,\phi)}^{g_2(\theta,\phi)} f\,(\rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \rho\cos\phi)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$ *Problemas*

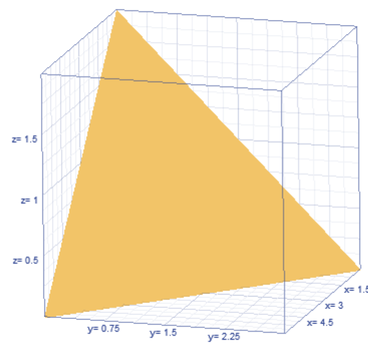
Problemas resueltos

1. Dibuje la región *Q* acotada por las graficas de las superficies cuyas ecuaciones se dan y exprese $\iiint\limits_Q f(x,y,z)dV$ como una integral iterada en las seis diferentes formas.

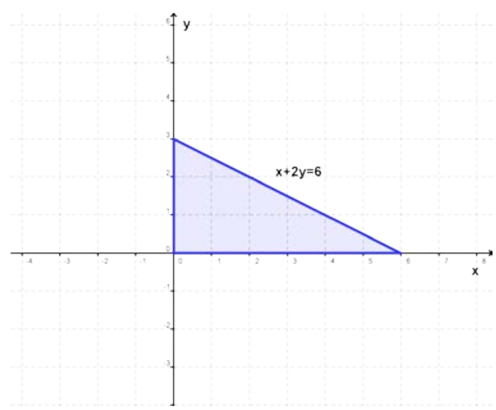
$$x+2y+3z=6\,;\quad x=0\,;\quad y=0 \ \text{ y } \ z=0$$

Solución:

La región *Q* está acotada por la parte del plano de ecuación $x+2y+3z=6$ que está en el primer octante y los planos coordenados, por lo que *Q* es la región que se observa en la figura.



a) La proyección de *Q* sobre el plano $z=0$ es la región triangular *R* sombreada, limitada por las rectas de ecuaciones $x+2y=6$, $y=0$ y $x=0$, mostrada en la figura.



Cuando $(x\,,y)\in R$ se tiene que

$$0\le z\le \frac{6-x-2y}{3}$$

Si se considera a *R* como una región de tipo 1:

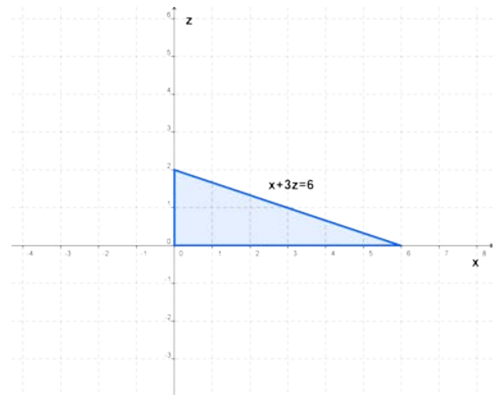
$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)dV=\int_0^6\int_0^{\frac{6-x}{2}}\int_0^{2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

Y

Si se considera a *R* como una región de tipo 2:

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)dV=\int_0^3\int_0^{6-2y}\int_0^{2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y} f(x,y,z)dz\,dx\,dy$$

b) La proyección de *Q* sobre el plano $y=0$ es la región triangular *S* acotada por las rectas de ecuaciones $x+3z=6$, $z=0$ y $x=0$, sombreada en la figura.



Cuando $(x\,,z)\in S$ se tiene que

$$0\le y\le \frac{6-x-3z}{2}$$

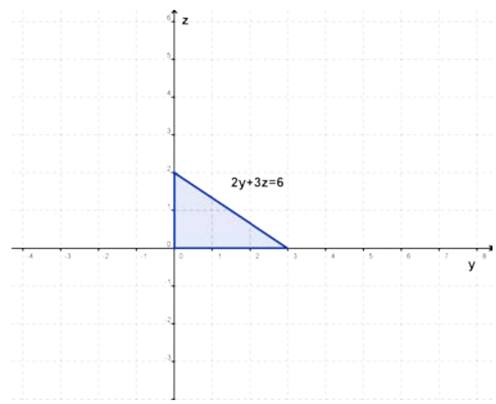
Entonces, si se considera a *S* como una región de tipo 1:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV=\int_0^6\int_0^{\frac{6-x}{3}}\int_0^{3-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}z} f(x,y,z)dy\,dz\,dx$$

Y si se considera a *S* como una región de tipo 2:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV=\int_0^2\int_0^{6-3z}\int_0^{3-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}z} f(x,y,z)dy\,dx\,dz$$

c) La proyección de *Q* sobre el plano $x=0$ es la región *U* limitada por las rectas de ecuaciones $2y+3z=6$, $y=0$ y $z=0$, sombreada en la figura.



Cuando $(y\,,z)\in U$ se tiene que

$$0\le x\le 6-2y-3z$$

Entonces, si se considera a *U* como una región de tipo 1:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV=\int_0^3\int_0^{\frac{6-2y}{3}}\int_0^{6-2y-3z} f(x,y,z)dx\,dz\,dy$$

Y si se considera a *U* como una región de tipo 2:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV=\int_0^2\int_0^{\frac{6-3z}{2}}\int_0^{6-2y-3z} f(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

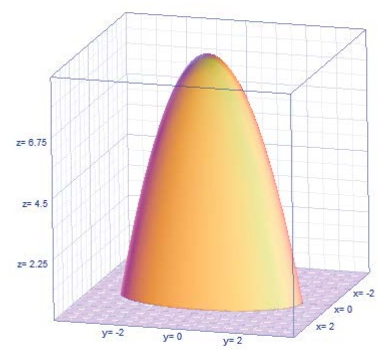
2. Dibuje la región *Q* acotada por las graficas de las superficies cuyas ecuaciones se dan y exprese $\iiint_Q f(x,y,z)dV$ como una integral iterada en las seis diferentes formas.

$$z = 9 - 4x^2 - y^2 \quad \text{y} \quad z = 0$$

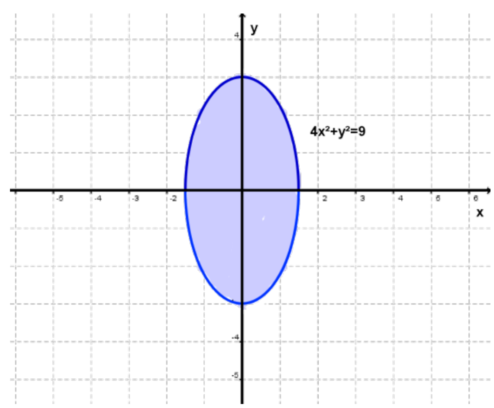
Solución:

La región *Q* es la región del espacio limitada por el paraboloide elíptico de ecuación $z = 9 - 4x^2 - y^2$ y el plano *xy*, como se observa en la figura.

.



a) La proyección de *Q* sobre el plano $z = 0$ es la región *R* limitada por la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{\frac{9}{4}} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, sombreada en la figura.



Cuando $(x\,,y) \in R$ se tiene que

$$0 \le z \le 9 - 4x^2 - y^2$$

Si se considera a *R* como una región de tipo 1:

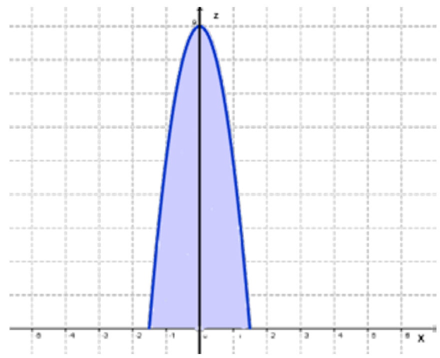
$$\iiint_Q f(x, y, z)\,dV = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \int_{-\sqrt{9-4x^2}}^{\sqrt{9-4x^2}} \int_0^{9-4x^2-y^2} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$$

Y si se considera a *R* como una región de tipo 2:

$$\iiint_Q f(x, y, z)\,dV = \int_{-3}^{3} \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{9-y^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{9-y^2}} \int_0^{9-4x^2-y^2} f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy$$

b) La proyección de *Q* sobre el plano $y = 0$ es la región *S* limitada por la parábola de ecuación $z = 9 - 4x^2$ y el eje *x*, sombreada en la figura.
Cuando $(x\,,z) \in S$ se tiene que

$$-\sqrt{9 - 4x^2 - z} \le y \le \sqrt{9 - 4x^2 - z}$$



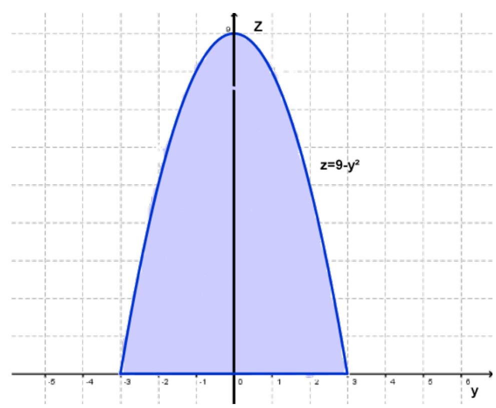
Si se considera a *S* como una región de tipo 1:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\int_0^{9-4x^2}\int_{-\sqrt{9-4x^2-z}}^{\sqrt{9-4x^2-z}} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$$

Y si se considera a *S* como una región de tipo 2:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_0^9\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{9-z}}^{\frac{1}{2}\sqrt{9-z}}\int_{-\sqrt{9-4x^2-z}}^{\sqrt{9-4x^2-z}} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$$

c) La proyección de *Q* sobre el plano $x=0$ es la región *U* limitada por la parábola de ecuación $z=9-y^2$ y el eje *y*, sombreada en la figura.



Cuando $(y,z)\in U$ se tiene que

$$-\frac{\sqrt{9-.y^2-z}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{9-y^2-z}}{2}$$

Si se considera a *U* como una región de tipo 1:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_0^9\int_{-\sqrt{9-z}}^{\sqrt{9-z}}\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{9-y^2-z}}^{\frac{1}{2}\sqrt{9-y^2-z}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Y si se considera a *U* como una región de tipo 2:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_{-3}^{3}\int_0^{9-y^2}\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{9-y^2-z}}^{\frac{1}{2}\sqrt{9-y^2-z}} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$$

Nota: ¿Usted conoce la función a integrar? ¿Por qué no es correcto, en ninguno de los casos, usar la simetría del sólido para plantear las integrales?

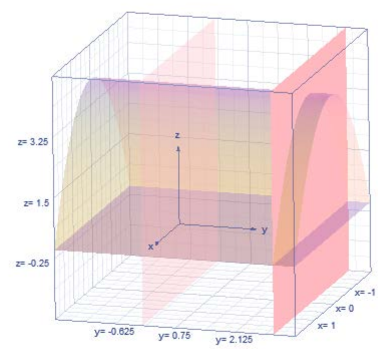
3. Sea $\mathrm{I} = \iiint\limits_R f(x, y, z)\, dV$, donde *R* es la región del espacio limitada por las gráficas de $z = 4 - x^2$, $z = 0$, $y = 0$ y $y = 3$.

a) Dibuje la región de integración.

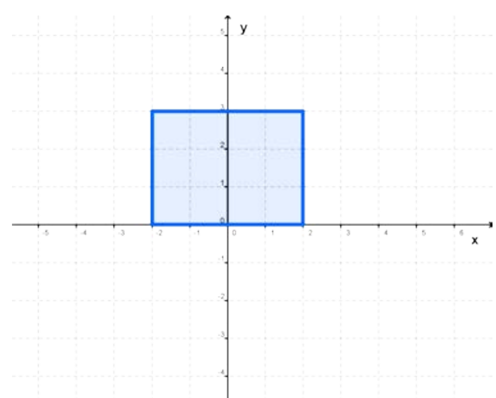
b) Dibuje la proyección de *R* sobre cada uno de los planos coordenados y plantee la integral I en cada caso.

Solución:

a) Observe que $z = 4 - x^2$ es la ecuación de una superficie cilíndrica que interseca al plano *xz* en la parábola de ecuación $z = 4 - x^2$, y se extiende paralelamente al eje y; $z = 0$ y $y = 0$ son las ecuaciones de los plano *xy* y *xz* respectivamente, mientras que $y = 3$ es la ecuación de un plano paralelo al plano *xz* que interseca al eje y en el punto $(0, 3, 0)$. La región *R* es la región del espacio limitada por las superficies que se muestran en la figura.



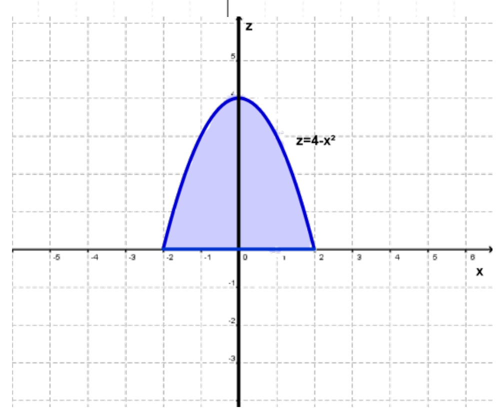
b.1) Al proyectar *R* sobre el plano *xy* se obtiene la región rectangular mostrada en la figura.



En consecuencia,

$$\mathrm{I} = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{3} \int_{0}^{4-x^2} f(x, y, z)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

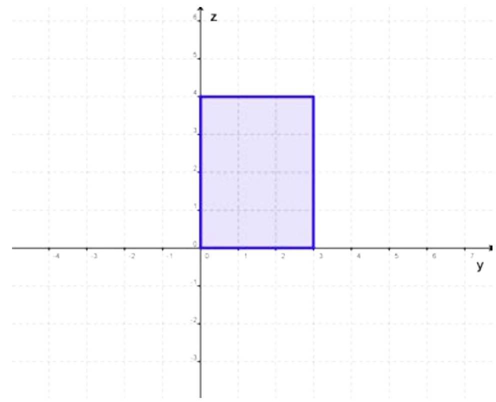
b.2) Al proyectar *R* sobre el plano *xz* se obtiene la región limitada por la parábola de ecuación $z = 4 - x^2$ y el eje *x* sombreada en la figura.



En consecuencia,

$$\mathrm{I} = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{4-x^2} \int_{0}^{3} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

b.3) Al proyectar *R* sobre el plano *yz* se obtiene la región rectangular mostrada en la figura.



En consecuencia,

$$\mathrm{I}=\int_0^3\int_0^4\int_{-\sqrt{4-z}}^{\sqrt{4-z}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$$

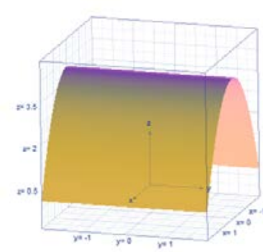
Nota: ¿Usted conoce la función a integrar? ¿Por qué no es correcto, en ninguno de los casos, usar la simetría del sólido para plantear las integrales?

4. Sea $\mathrm{I}=\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dV$, donde *R* es la región del espacio limitada por las gráficas de $z=4-x^2$, $z=0$, $y=0$ y $x+y=2$ que está en el primer octante.

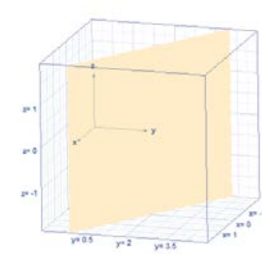
- **a)** Dibuje la región de integración.
- **b)** Dibuje la proyección de *R* sobre cada uno de los planos coordenados y plantee la integral I en cada caso.

Solución:

a) Observe que $z=4-x^2$ es la ecuación de una superficie cilíndrica que interseca al plano *xz* en la parábola de ecuación $z=4-x^2$ y se extiende paralelamente al eje *y*, como se observa en la figura.

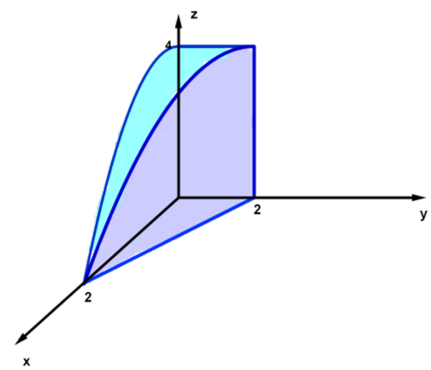


Mientras que $x+y=2$ es la ecuación de un plano que interseca al plano *xy* en una recta de ecuación $x+y=2$ y se extiende paralelamente al eje *z*, como se observa en la figura.

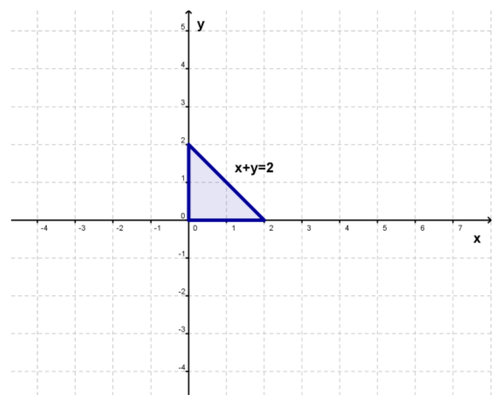


Finalmente, $z=0$ y $y=0$ son las ecuaciones de los plano *xy* y *xz* respectivamente.

La región *R* es la porción de la región del espacio que se muestra en la figura.



b) **i**) Al proyectar *R* sobre el plano *xy* se obtiene la región triangular *S* que se muestra en la figura.

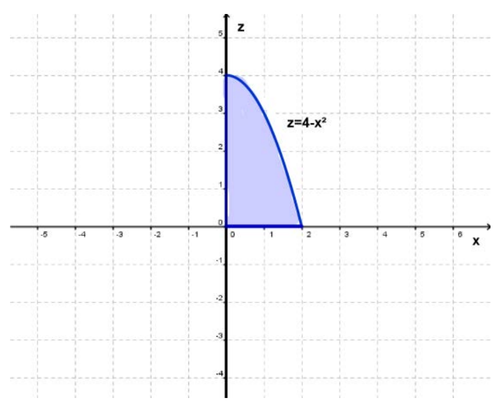


Cuando $(x,y)\in S$ se tiene que $0\le z\le 4-x^2$.

Entonces,

$$\mathrm{I}=\int_0^2\int_0^{2-x}\int_0^{4-x^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

ii) Al proyectar *R* sobre el plano *xz* se obtiene la región *U* que se muestra en la figura.

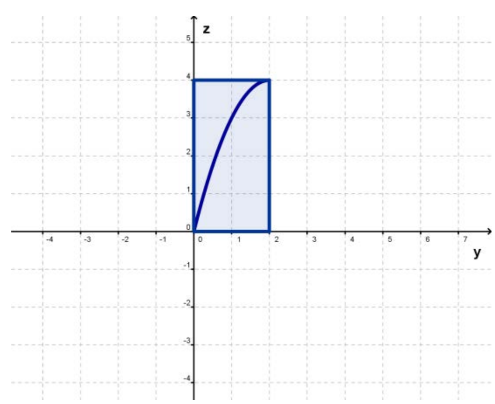


Cuando $(x,z)\in U$ se tiene que $0\le y\le 2x$.

Entonces,

$$\mathrm{I}=\int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^{2-x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

iii) Al proyectar *R* sobre el plano *yz* se obtiene la región rectangular *P* que se muestra en la figura, donde la curva observada, es la proyección de la curva de intersección del paraboloide con el plano, cuya ecuación se obtiene como sigue:



$$x+y=2\Rightarrow y=2-x$$

Y al sustituir el valor de *y* en $z=4-x^2$, se obtiene $z=4-(y-2)^2$

Para plantear la integral, observe en la gráfica de la superficie que

$$\text{Si } 0 \le y \le 2 \ \text{ y } \ 0 \le z \le 4-(y-2)^2 \ \text{ entonces } 0 \le x \le 2-y$$
$$\text{Si } 0 \le y \le 2 \ \text{ y } \ 4-(y-2)^2 \le z \le 4 \ \text{ entonces } 0 \le x \le \sqrt{4-z}$$

En consecuencia,

$$\mathrm{I} = \int_0^2 \int_0^{4-(2-y)^2} \int_0^{2-y} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy + + \int_0^2 \int_{4-(2-y)^2}^{4} \int_0^{\sqrt{4-z}} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$$

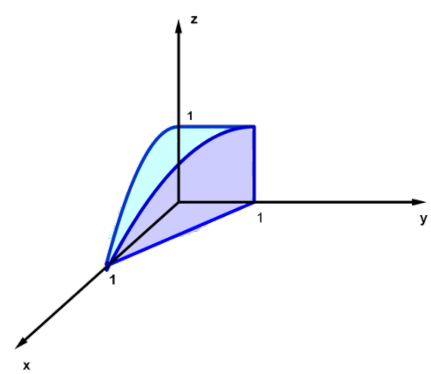
5. Sea *Q* es la región del espacio que está en el primer octante limitada por las gráficas de $x+y=1,\ z=1-x^2$.

a) Dibuje la región *Q*.

b) Calcule el volumen del sólido *Q*.

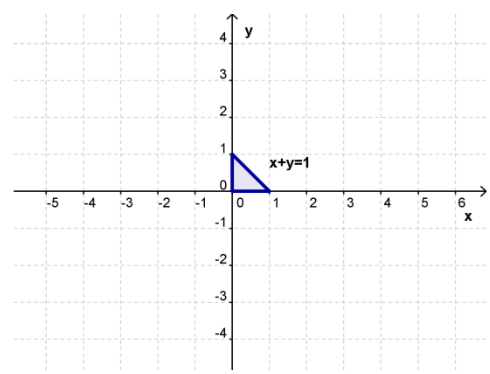
Solución:

a) La ecuación $x+y=1$ corresponde a la ecuación de un plano que se extiende paralelamente al eje *z*, y $z=1-x^2$ corresponde a la ecuación de una superficie que se extiende paralelamente al eje *y*, e interseca al plano *xz* en la parábola de ecuación $z=1-x^2$. El sólido *Q* es la parte del sólido limitado por ambas superficies que está en el primer octante.



b) La proyección en el plano *xy* de *Q* es el triángulo limitado por las rectas de ecuaciones $x+y=1,\ x=0$ y $y=0$.

Por lo tanto,



$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x^2} dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(1-x^2\right) dy dx = \int_0^1 \left(1-x^2\right)\left(1-x\right) dx = \int_0^1 \left(1-x-x^2+x^3\right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

6. Halle las coordenadas del centro de masa del cubo dado por $0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le a, \quad 0 \le z \le a$, si este tiene densidad $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Solución:

Por definición,

Las coordenadas del centro de masa (x_M, y_M, z_M) de un sólido *Q* vienen dadas por:

$$x_M = \frac{1}{M(Q)} \iiint_Q x\,\delta(x, y, z)\,dV \qquad y_M = \frac{1}{M(Q)} \iiint_Q y\,\delta(x, y, z)\,dV \quad \text{y} \quad z_M = \frac{1}{M(Q)} \iiint_Q z\,\delta(x, y, z)\,dV$$

La masa de *Q* viene dada por

$$M(Q) = \int_0^a \int_0^a \int_0^a \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dx\,dy\,dz = \int_0^a \int_0^a \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x + z^2 x\right]_0^a dy\,dz = \int_0^a \int_0^a \left[\frac{a^3}{3} + ay^2 + az^2\right] dy\,dz =$$

$$= \int_0^a \left[\frac{a^3 y}{3} + a\frac{y^3}{3} + az^2 y\right]_0^a \mathrm{dz} = \int_0^a \left[\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3} + a^2 z^2\right] dz = \left[\frac{2a^4}{3} z + a^2 \frac{z^3}{3}\right]_0^a = a^5$$

Luego,

$$x_M = \frac{1}{a^5} \iiint_Q x\left(x^2 + y^2 + z^2\right) dV = \frac{1}{a^5} \int_0^a \int_0^a \int_0^a \left(x^3 + xy^2 + xz^2\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{a^5} \int_0^a \int_0^a \left[\frac{x^4}{4} + y^2 \frac{x^2}{2} + z^2 \frac{x^2}{2}\right]_0^a dy\,dz = \frac{1}{a^5} \int_0^a \int_0^a \left[\frac{a^4}{4} + \frac{a^2}{2} y^2 + \frac{a^2}{2} z^2\right] dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{a^5} \int_0^a \left[\frac{a^4 y}{4} + \frac{a^2}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{a^2}{2} z^2 y\right]_0^a \mathrm{dz} = \frac{1}{a^5} \int_0^a \left[\frac{a^5}{4} + \frac{a^5}{6} + \frac{a^3}{2} z^2\right] \mathrm{dz} = \frac{1}{a^5}\left[\frac{5a^5}{12} z + \frac{a^3}{2}\frac{z^3}{3}\right]_0^a = \frac{7a}{12}$$

Por simetría se tiene que $x_M = y_M = z_M$

Por lo tanto, el centro de masa de *Q* está en el punto de coordenadas $\left(\frac{7a}{12}, \frac{7a}{12}, \frac{7a}{12}\right)$.

7. Plantee y calcule la integral $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^4 z\,\mathrm{dz}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ en coordenadas cilíndricas.

Solución:

A partir de los límites de integración, se tiene que

$$0 \le z \le 4 \qquad 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2} \qquad 0 \le x \le 1$$

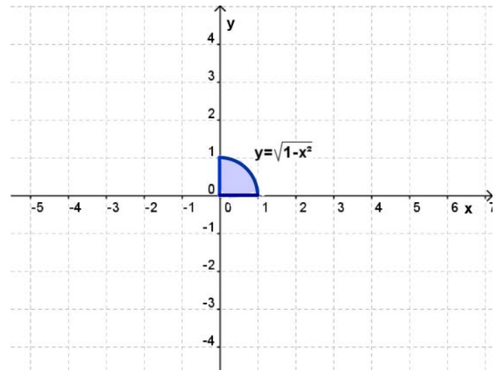
Por lo tanto, la región R del espacio, sobre la cual se integra, se puede describir como

$$R = \{(x, y, z)/(x, y) \in D, \quad 0 \leq z \leq 4\}$$

donde D es la región del plano que se puede definir como

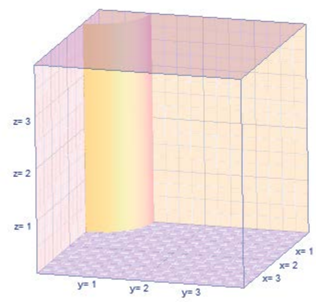
$$D = \left\{(x, y)/ \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1\right\}$$

que se muestra en la figura anexa.



En consecuencia,

R es la región del espacio que está en el primer octante limitada por los planos de ecuaciones $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ y por el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, como se muestra en la figura.



A partir de las ecuaciones de transformación de cartesianas a cilíndricas, se obtiene

$$0 \leq z \leq 4 \qquad 0 \leq r \leq 1 \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Y en consecuencia, R puede ser descrita en coordenadas cilíndricas como

$$R = \{(r, \theta, z)/(r, \theta) \in D, \quad 0 \leq z \leq 4\}$$

con

$$D = \left\{(r, \theta)/ \, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1\right\}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^4 z \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^4 z \, r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = 2\pi$$

8. Sea $I=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r^2} r\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$. Grafique el sólido sobre el cual se integra y plantee la integral en coordenadas rectangulares. Elija el orden de integración que considere conveniente.

Solución:

A partir de los límites de integración, se tiene que

$$0 \le z \le 4 - r^2 \qquad 0 \le r \le 2 \quad \text{y} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

A partir de las ecuaciones de transformación de cilíndricas a cartesianas, se tiene:

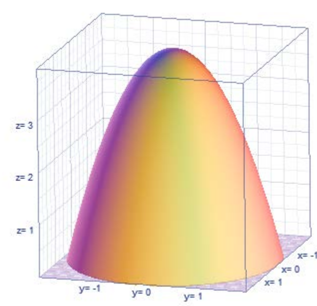
$$0 \le z \le 4 - r^2 \Rightarrow 0 \le z \le 4 - \left(x^2 + y^2\right)$$

Es decir, *z* varía entre el plano de ecuación $z = 0$ y el paraboloide de ecuación $z = 4 - \left(x^2 + y^2\right)$.

Observe que:

$$z = 0 \Rightarrow 4 = \left(x^2 + y^2\right)$$

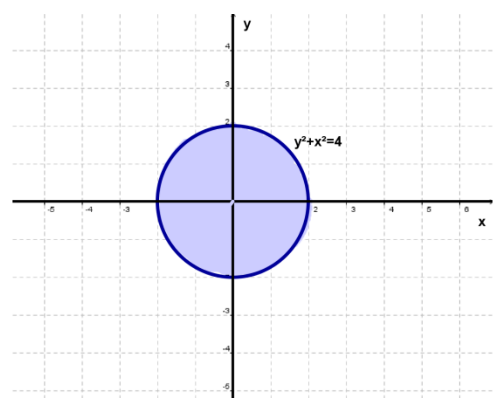
Mientras que, $r = 2$ corresponde a la ecuación de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.



En consecuencia, la región de integración está limitada inferiormente por el plano *xy* y superiormente por el paraboloide de ecuación $z = 4 - x^2 - y^2$, que se observa en la figura, cuya proyección en el plano *xy* es el círculo de ecuación

$$x^2 + y^2 \le 4$$

Por lo tanto,



$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r^2} r\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{4-\left(x^2+y^2\right)} \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$$

Esta integral corresponde al volumen del sólido definido por los límites de integración, y dado que existe simetría, se puede escribir también como

$$V = 4\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{4-\left(x^2+y^2\right)} \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$$

9. Cambie a coordenadas cilíndricas la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

Solución:

A partir de los límites de integración, se tiene que

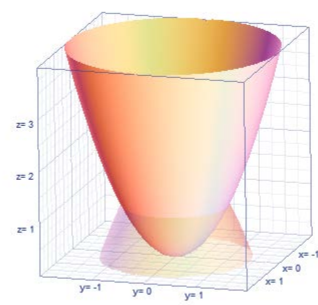
$$x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2 \qquad -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \qquad -1\le x\le 1$$

En este caso, el sólido sobre el cual se integral está el limitado inferiormente por el paraboloide de ecuación $x^2+\mathrm{y}^2=z$ y superiormente por el paraboloide de ecuación $z=2-x^2-y^2$.

Para obtener la ecuación de la curva de intersección de ambas superficies se resuelve el sistema

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=2-x^2-y^2 \end{cases}$$

$$2-x^2-y^2=x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2=1$$

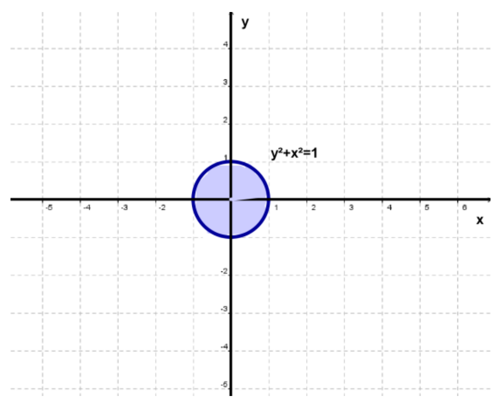


Luego, ambas superficies se intersecan en la circunferencia de ecuación

$$x^2+y^2=1 \text{ en el plano } z=1$$

Como se observa en la figura.

En consecuencia, la proyección del sólido en el plano *xy* es el círculo de ecuación $x^2+y^2=1$, sombreado en la figura.



Las ecuaciones $x^2+\mathrm{y}^2=z$ y $z=2-x^2-y^2$, se escriben en coordenadas cilíndricas como: $z=\mathrm{r}^2$ y $z=2-\mathrm{r}^2$. Luego, la región sobre la cual se integra puede ser descrita en coordenadas cilíndricas como

$$\left\{(r,\theta,\mathrm{z})/\,0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le r\le 1,\quad r^2\le z\le 2-\mathrm{r}^2\right\}$$

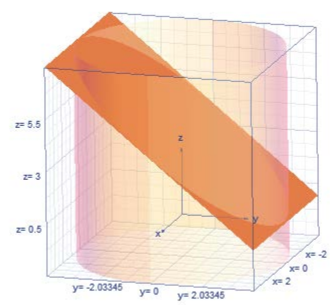
Por lo tanto,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{dz}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\int_{r^2}^{2-r^2}\left(r^2\right)^{\frac{3}{2}}\,r\,\mathrm{dz}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

10. Dibuje la región de integración, plantee y calcule en coordenadas cilíndricas la integral $I=\iiint_E (x+z)dV$, si *E* es la región del espacio limitada por las gráficas de las ecuaciones $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ y $y+z=a$, con $a>0$.

Solución:

En este caso, el sólido sobre el cual se integra está el limitado por el cilindro de ecuación $x^2+y^2=a^2$, por el plano *xy* y por el plano de ecuación $y+z=a$.



Al usar las ecuaciones de transformación se obtiene que:

$$x^2+y^2=a^2 \Rightarrow r^2=a^2 \quad \text{y} \quad y+z=a \Rightarrow z=a-y \Rightarrow z=a-r\mathrm{sen}\theta$$

Por lo tanto, la región *E* sobre la cual se integra puede ser descrita en coordenadas cilíndricas como:

$$E=\{(r,\theta,z)/\,0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le r\le a,\quad 0\le z\le a-r\,\mathrm{sen}\theta\}$$

De donde,

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{a-r\,sen\theta}\left(r\cos\theta+z\right)r\,\mathrm{dz}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\frac{31}{24}a^4\pi$$

11. Considere la integral $\iiint_Q x\,z\,dV$, donde *Q* es el sólido limitado por los planos de ecuaciones $z=0$ y $z=y$, y el cilindro de ecuación $x^2+\mathrm{y}^2=1$, en el semiespacio $y\ge 0$

a) Dibuje el sólido *Q*.

b) Plantee la integral en coordenadas cartesianas.

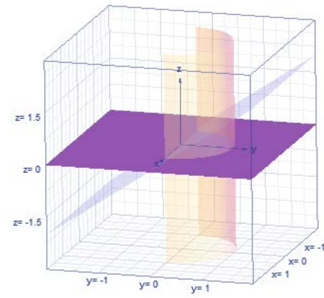
c) Plantee la integral en coordenadas cilíndricas.

d) Calcule la integral en coordenadas cilíndricas..

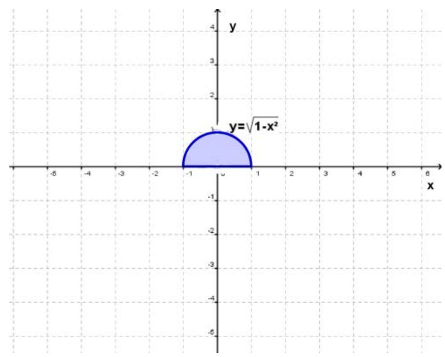
Solución:

a) Observe que:

$x^2 + y^2 = 1$ corresponde a la ecuación de un cilindro que se extiende paralelamente al eje *z* cuya intersección con el plano *xy* es una circunferencia de centro el origen y radio 1, $y \geq 0$ indica que se está tomando la parte que se encuentra a la derecha del plano *xz*, $z = 0$ es el plano xy, y $z = y$ es la ecuación de un plano inclinado que se extiende paralelamente al eje *x* cuya intersección con el plano *yz* es la recta de ecuación $z = y$.



b) Para plantear la integral en coordenadas cartesianas se proyecta el sólido *Q* en el plano *xy*, y se obtiene el semicírculo sombreado en la figura.



Por lo tanto,

$$\iiint_Q xz \, dV = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{y} xz \; dz \, dy \, dx$$

c) Nota que $z = y$, se transforma en coordenadas cilíndricas en $z = r\,\text{sen}\theta$ y $x^2 + y^2 = 1$ se transforma en $r = 1$, como $y \geq 0$ se tiene que $0 \leq \theta \leq \pi$. Luego, *Q* puede ser descrito en coordenadas cilíndricas como

$$Q = \{(r, \theta, z)/\, 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq z \leq r\,\text{sen}\,\theta\}$$

En consecuencia,

$$\iiint_Q xz \, dV = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{1} \int_{0}^{r\,\text{sen}\,\theta} z\,r^2 \; \cos\theta \; dz \, dr \, d\theta$$

d) $$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{1} \int_{0}^{r\,\text{sen}\,\theta} z\,r^2 \; \cos\theta \; dz \, dr \, d\theta = 0$$

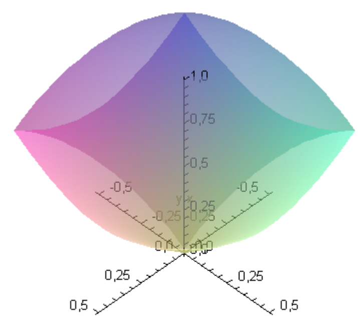
12. Sea *S* la región del espacio acotada superiormente por la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$ e inferiormente por el cono de ecuación $z^2=x^2+y^2$ para $z\geq 0$. Calcule $\iiint\limits_S z\,dV$.

a) En coordenadas cilíndricas.

b) En coordenadas cartesianas.

Solución:

La representación gráfica de la región corresponde a la región sombreada en la figura



a) La ecuación del cono $z^2=x^2+y^2$ en coordenadas cilíndricas es $z^2=r^2\Rightarrow z=r$ ($z\geq 0$ y $r\geq 0)$.

La ecuación de la semiesfera $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ es $z=\sqrt{1-r^2}$.

Por otra parte, la intersección de las dos superficies se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} z=\sqrt{1-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow 2x^2+2y^2=1 \Rightarrow x^2+y^2=\frac{1}{2}$$

Luego, ambas superficies se intersecan la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$ en el plano $z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Es decir, esta es una circunferencia de centro el punto $C\left(0,0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, radio $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y que está ubicada en el plano $z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Cuya proyección en el plano *xy* es la circunferencia de ecuación

$x^2+y^2=\frac{1}{2}$. En coordenadas polares corresponde a la ecuación $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$, luego la proyección de la circunferencia en el plano polar es el conjunto

$$D=\left\{(\mathrm{r},\theta)/\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le \mathrm{r}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

Luego, en coordenadas cilíndricas, *S* se describe como

$$S=\left\{(\mathrm{r},\theta,z)/\quad 0\le r\le\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad r\le z\le\sqrt{1-r^2}\right\}$$

Por lo tanto,

$$\iiint_S z\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_r^{\sqrt{1-r^2}} z\,r\ \mathrm{dz\ dr\ d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(r-2r^3\right)dr\,d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)d\theta=\frac{1}{16}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{2\pi}{16}=\frac{\pi}{8}$$

b) La región *S* se describe como

$$S=\left\{(x,y,z)/\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{2}},\quad -\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\le y\le\sqrt{\frac{1}{2}-x^2},\quad \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$$

Por lo tanto,

$$\iiint_S z\,dV=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\ \mathrm{dz\ dy\ d}x=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}\left(1-2x^2-2y^2\right)dy\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(2\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}-4x^2\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\left(2-4x^2\right)-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(4\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{4}{3}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=$$

$$= \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 u\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos u\, du = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u\, du = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2u}{2}\right)^2 du =$$

$$\frac{1}{12}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2u + \frac{1+\cos 4u}{2}\right) du = \frac{1}{12}\left(\frac{3}{2}u + \operatorname{sen} 2u + \frac{\operatorname{sen} 4u}{8}\right)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{12}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8}$$

Nota: Observe como el uso de un sistema de coordenadas apropiado puede simplificar el calculo de algunas integrales triples.

13. Calcule el volumen del sólido Ω limitado por el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 - 6x = 0$ y la semiesfera de ecuación $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$ y el plano *xy*. Utilice coordenadas cilíndricas.

Solución:

Observe que la ecuación del cilindro se puede escribir como:

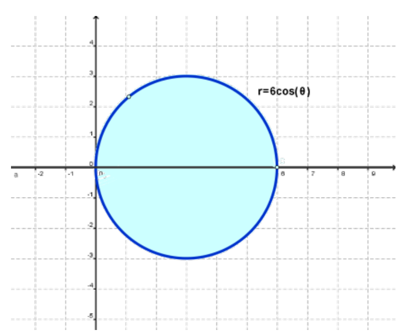
$$x^2 + y^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 9$$

Y en coordenadas cilíndricas es:

$$x^2 + y^2 - 6x = 0 \Rightarrow r^2 - 6r\cos\theta = 0 \Rightarrow r(r - 6\cos\theta) = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{ó} \quad r = 6\cos\theta$$

La ecuación de la semiesfera en coordenadas cilíndricas es $z = \sqrt{36 - r^2}$.

La proyección sobre el plano *xy* de Ω es el círculo limitado por la circunferencia de ecuación $r = 6\cos\theta$ que se muestra en la figura anexa.



Luego,

$$\Omega = \left\{(\mathrm{r}, \theta, z) / \quad 0 \le r \le 6\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le z \le \sqrt{36 - r^2}\right\}$$

Como el sólido es simétrico respecto al eje *x*, se tiene que

$$V(\Omega) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{6\cos\theta} \int_0^{\sqrt{36-r^2}} r \text{ dz dr d}\theta = 72\pi - 96$$

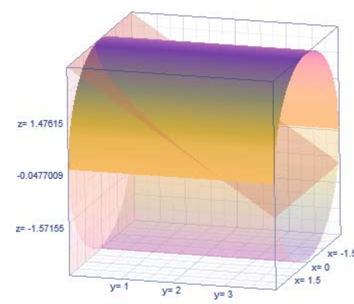
14. Halle la masa de un sólido *Q* acotado por las superficies de ecuaciones $x^2 + z^2 = 9$, $y + z = 3$ y $y = 0$ si la densidad de masa *Q* es $\delta(x, y, z) = x^2 + z^2$. Utilice coordenadas cilíndricas.

Solución:

$x^2 + z^2 = 9$ es la ecuación de un cilindro que se extiende paralelamente al eje *y* cuya intersección con el plano *xz* es una circunferencia de centro el origen y radio 3.

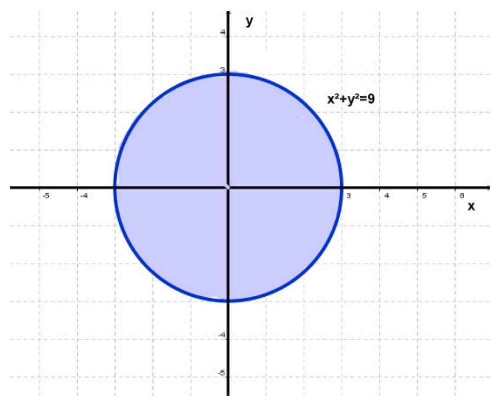
$y = 0$ es la ecuación del plano *xz*.

$y + z = 3$ es la ecuación de un plano inclinado que se extiende paralelamente al eje *x*



El cilindro y el plano se intersecan en la curva de ecuación $x^2 + (3 - y)^2 = 9$.

Al proyectar el sólido sobre el plano *xz* se obtiene la región limitada por la circunferencia de ecuación $x^2 + z^2 = 9$, la cual se muestra en la figura.



Si se hace la sustitución

$$x = r\cos\theta, \quad z = r\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \text{y} \quad y = y$$

La ecuación del plano $y = 3 - z$ en coordenadas cilíndricas $y = 3 - \mathrm{r\,sen}\,\theta$ es.

Se tiene que la región Ω sobre la cual se integra es

$$\Omega = \{(\mathrm{r}, \theta, y) / \quad 0 \le r \le 3, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le y \le 3 - r\mathrm{sen}\,\theta\}$$

Luego, la integral en coordenadas cilíndricas es:

$$M(Q) = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{3-r\mathrm{sen}\,\theta} r\ r^2 \text{ dy d}\theta \text{ dr} = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \mathrm{r}^3 [y]_0^{3-\,r\mathrm{sen}\,\theta} \text{d}\theta \text{ d}r = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \mathrm{r}^3 [3 - \mathrm{sen}\,\theta] \text{d}\theta \text{ d}r$$

$$= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \mathrm{r}^3 [3 - \mathrm{sen}\,\theta] \text{d}\theta \text{ d}r = \int_0^3 r^3 [3\theta + \cos\theta]_0^{2\pi} \text{ dr} = 6\pi \int_0^3 r^3 \text{ dr} = 6\pi \left[\frac{\mathrm{r}^4}{4}\right]_0^3 = \frac{243\pi}{2}$$

Por lo tanto, la masa del sólido *Q* es $\frac{243\pi}{2}$ unidades de masa.

15. Plantee y calcule la integral $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\,dz\,dy\,dx$ en coordenadas esféricas.

Solución:

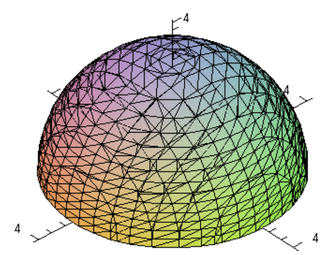
A partir de los límites de integración, se tiene que

$$0 \le z \le \sqrt{9-x^2-y^2} \qquad -\sqrt{9-x^2} \le y \le \sqrt{9-x^2} \quad \text{y} \quad -3 \le x \le 3$$

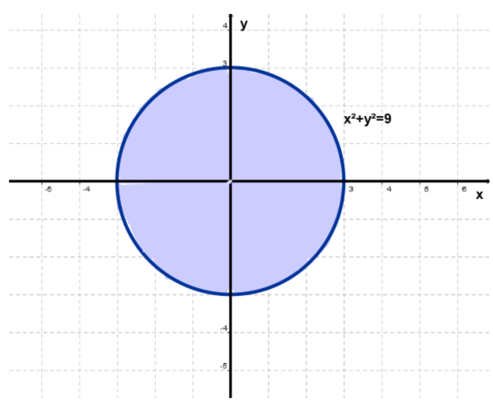
Observe que

$$z=\sqrt{9-x^2-y^2} \Rightarrow z^2+x^2+y^2=9 \quad \text{y} \quad \left(y=\sqrt{9-x^2} \quad \text{ó} \quad y=-\sqrt{9-x^2}\right) \Rightarrow x^2+y^2=9$$

Es decir, la región de integración, que se muestra en la figura, corresponde al sólido limitado superiormente por el casquete superior de la esfera centrada en el origen de radio 3 e inferiormente por el plano *xy*.



Como la proyección del sólido en el plano *xy* es el círculo de ecuación $x^2+y^2 \le 9$, aplicando las ecuaciones de transformación, se tiene que, la región *R* del espacio sobre la cual se integra puede ser descrita, mediante coordenadas esféricas:



$$R=\left\{(\rho,\theta,\Phi)/ \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \Phi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \rho \le 3\right\}$$

Luego,

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\left(\rho\cos(\Phi)\rho\right)\rho^2 sen(\Phi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\Phi = \frac{3^5}{5}\pi$$

16. Dada $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sec\Phi}\rho^2\operatorname{sen}\Phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\Phi$, grafique el sólido sobre el cual se integra y plantee la integral en coordenadas rectangulares:

Solución:

A partir de los límites de integración, se tiene que

$$0\le\rho\le\sec\Phi \quad ; \quad 0\le\theta\le 2\pi \qquad \text{y} \qquad 0\le\Phi\le\frac{\pi}{3}$$

A partir de las ecuaciones de transformación, se tiene

$$\rho=\sec\Phi\Rightarrow\rho=\frac{1}{\cos\Phi}\Rightarrow\rho\cos\Phi=1\Rightarrow z=1 \qquad (1)$$

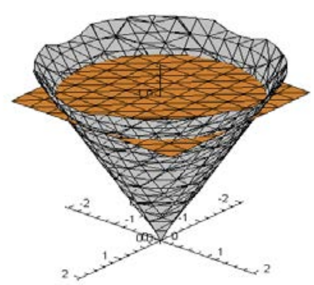
Por otra parte,

$$\Phi=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\ z=\rho\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow z=\rho\frac{1}{2}\Rightarrow 4z^2=\rho^2\Rightarrow 4z^2=x^2+y^2+z^2\Rightarrow 3z^2=x^2+y^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3} \qquad (2)$$

Que corresponde a la ecuación de un cono de eje *z*.

De (1) y (2), se tiene que $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}\le z\le 1$, es decir, *z* varía entre la gráfica de $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$, que corresponde a la parte superior del cono, y el plano de ecuación $z=1$. Como se muestra en la figura.

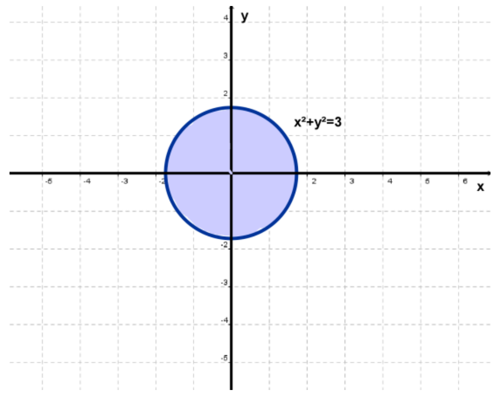


Para obtener la curva que limita la proyección en el plano *xy*, se halla la intersección de ambas superficies, es decir, se resuelve el sistema $\begin{cases} z=1 \\ z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \end{cases}$,

$$\begin{cases} z = 1 \\ z = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \end{cases} \Rightarrow 1 = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \Rightarrow \dfrac{x^2+y^2}{3} = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 3$$

Luego, ambas superficies se intersecan la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=3$ en el plano $z=1$

En consecuencia, la proyección del sólido en el plano *xy* es el círculo centrado en el origen y radio $\sqrt{3}$, que se muestra en la figura anexa.



Por lo tanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sec\Phi} \rho^2 \operatorname{sen}\Phi \; d\rho\, d\theta\, d\Phi = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}}^{1} dz\, dy\, dx = 4\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3-x^2}}\int_{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}}^{1} dzdydx$$

Observe que, como la función a integrar es 1, la integral triple corresponde al volumen del sólido que corresponde a la región de integración.

17. Cambie a coordenadas esféricas y calcule la integral

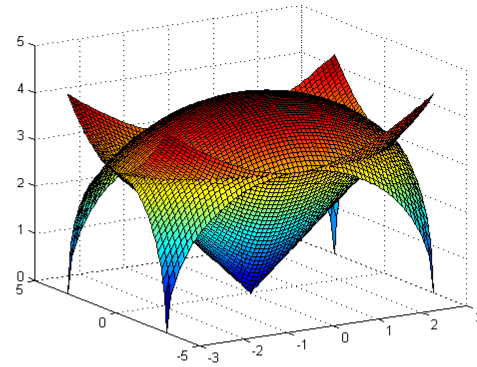
$$\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\, dz\, dx\, dy$$

Solución:

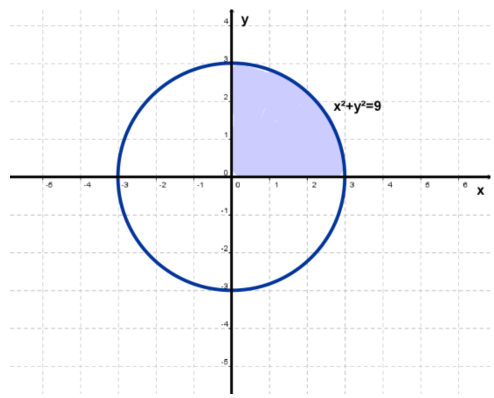
A partir de los límites de integración, se tiene que

$$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{18-x^2-y^2} \qquad 0 \le x \le \sqrt{9-y^2} \qquad \text{y} \qquad 0 \le y \le 3$$

En este caso, z varía entre la parte del cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ que se encuentra por encima del plano *xy* y el casquete superior de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 18$, que se observa en la figura.



Como, $0 \leq x \leq \sqrt{9 - y^2}$ y $0 \leq y \leq 3$ se considera sólo la parte del sólido que está en el primer octante, y cuya proyección está en el primer cuadrante, sombreada en la figura anexa.



Luego,

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Al usar las ecuaciones de transformación, se tiene que $z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}$, se transforma en:

$$z = \sqrt{18 - x^2 - y^2} \Rightarrow z^2 + x^2 + y^2 = 18 \Rightarrow \rho^2 = 18 \square\ \rho = 3\sqrt{2}$$

Mientras que,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = z \Rightarrow \rho \cos \Phi = \sqrt{\rho^2 \text{sen}^2\Phi \cos^2\theta + \rho^2 \text{sen}^2\Phi \text{sen}^2\theta}$$

$$\square\ \rho^2\cos^2\Phi = \rho^2\text{sen}^2\Phi \ \square\ \cos^2\Phi - \text{sen}^2\Phi = 0 \ \square\ \cos 2\Phi = 0 \ \square\ \Phi = \frac{\pi}{4} \quad \text{ó} \quad \Phi = \frac{3\pi}{4}$$

Como $0 \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}$ por encontrarse en el primer octante, se tiene que la solución es $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Dado que la región es sólida, $0 \leq \Phi \leq \frac{\pi}{4}$ y $0 \leq \rho \leq 3\sqrt{2}$.

Luego, el sólido sobre el cual se integra es descrito por:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \rho \leq 3\sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad 0 \leq \Phi \leq \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\,dz\,dx\,dy \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3\sqrt{2}} \rho^2\rho^2 \operatorname{sen}\Phi\;\, d\rho\, d\theta\, d\Phi = \frac{3^5\cdot 2}{5}\pi\left(-1+\sqrt{2}\right)$$

18. Considere el sólido *Q* limitado inferiormente por la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$ y superiormente por superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

a) Dibuje el sólido *Q*.

b) Dibuje la proyección de *Q* en el plano *xy* y plantee una integral triple en coordenadas cartesianas que dé el volumen del sólido.

c) Dibuje la proyección de *Q* en el plano *xz* y plantee una integral triple en coordenadas cartesianas que dé el volumen del sólido.

d) Dibuje la proyección de *Q* en el plano *yz* y plantee una integral triple en coordenadas cartesianas que dé el volumen del sólido.

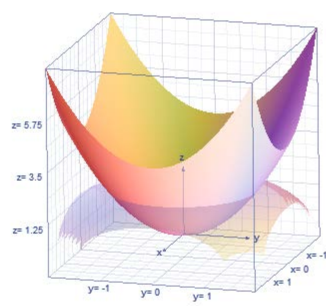
e) Plantee una integral triple en coordenadas cilíndricas que dé el volumen del sólido

f) Plantee una integral triple en coordenadas esféricas que dé el volumen del sólido

g) Calcule el volumen del sólido *Q*. (utilice la integral que considere más sencilla).

Solución:

a) $z = x^2 + y^2$ es la ecuación de un paraboloide que abre hacia arriba, y $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ es la ecuación de una esfera centrada en el origen y radio $\sqrt{6}$. El sólido *Q* es la región del espacio limitada por ambas superficies.



b) Ambas superficies se intersecan en una circunferencia cuya ecuación se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 & (2) \end{cases}$$

Al sustituir el valor de (1) en (2) se obtiene

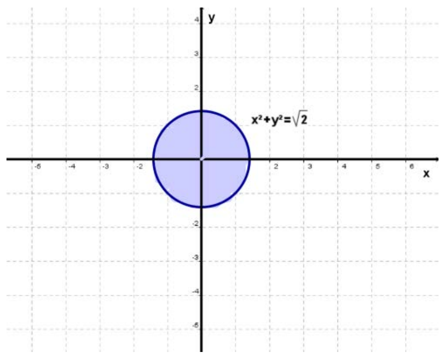
$$z + z^2 = 6 \Rightarrow z^2 + z - 6 = 0 \Rightarrow (z+3)(z-2) = 0$$

Como $z \geq 0$, la solución del sistema es $z = 2$, luego ambas superficies se intersecan en la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 2$ en el plano $z = 2$.

La proyección sobre el plano xy es el conjunto

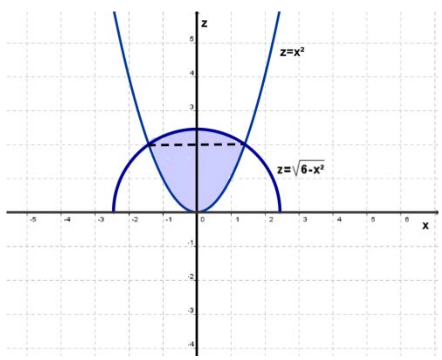
$$S=\{(x,y)\in R^2\ /\quad x^2+y^2\le 2\}$$

mostrada en la figura.



$$V=\iiint_Q dV=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$$

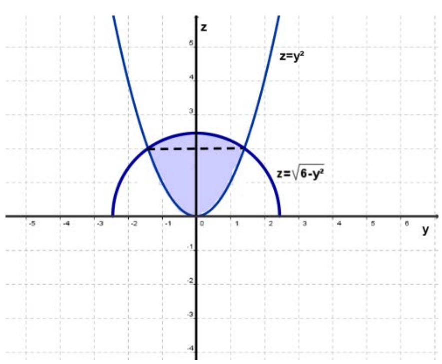
c) La proyección sobre el plano *xz* es la región limitada inferiormente por la parábola de ecuación $z=x^2$ y superiormente por la semicircunferencia de ecuación $z=\sqrt{6-x^2}$, mostrada en la figura.



$$V=\iiint_Q dV=\int_0^2\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy\,dx\,dz$$

$$+\int_2^{\sqrt{6}}\int_{-\sqrt{6-z}}^{\sqrt{6-z}}\int_{-\sqrt{6-x^2-z^2}}^{\sqrt{6-x^2-z^2}} dy\,dx\,dz$$

d) La proyección sobre el plano *yz* es la región limitada inferiormente por la parábola de ecuación $z=y^2$ y superiormente por la semicircunferencia de ecuación $z=\sqrt{6-y^2}$, mostrada en la figura.



$$V=\iiint_Q dV=\int_0^2\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} dx\,dy\,dz$$

$$+\int_2^{\sqrt{6}}\int_{-\sqrt{6-z}}^{\sqrt{6-z}}\int_{-\sqrt{6-y^2-z^2}}^{\sqrt{6-y^2-z^2}} dx\,dy\,dz$$

e) Las ecuaciones de las superficies en coordenadas cilíndricas vienen dadas por

$$z = x^2 + y^2 \Rightarrow z = r^2 \qquad \text{y} \qquad z = \sqrt{6 - x^2 - y^2} \Rightarrow z = \sqrt{6 - r^2}$$

Además, de b) se tiene que la proyección de Q en el plano *xy* es un círculo, por lo tanto el sólido *Q* es descrito en coordenadas cilíndricas por

$$0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le r \le \sqrt{2} \, , \ r^2 \le z \le \sqrt{6 - r^2}$$

Luego

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta$$

f) Las ecuaciones de las superficies en coordenadas esféricas vienen dadas por

$$z = x^2 + y^2 \Rightarrow \rho \cos\phi = \rho^2 sen^2\phi \Rightarrow \rho = \frac{\cos\phi}{sen^2\phi} \Rightarrow \rho = \operatorname{cotan}\phi \csc\phi$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \Rightarrow \rho = \sqrt{6}$$

Por otra parte,

$$z = 2 \Rightarrow \rho \cos\phi = 2$$

$$\rho \cos\phi = 2 \quad y \quad \rho = \sqrt{6} \Rightarrow \cos\phi = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \phi = \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Además, de b) se tiene que la proyección de *Q* en el plano *xy* es un círculo, por lo tanto el sólido *Q* es descrito en esféricas por

$$0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le \rho \le \sqrt{6} \, , \ 0 \le \varphi \le \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Y

$$0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le \rho \le \operatorname{cotan}\phi \csc\phi \, , \ \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto,

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)} \int_0^{\sqrt{6}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\operatorname{cotan}\phi \csc\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

g) El volumen puede ser determinado a partir de cualquiera de las integrales planteadas, por ejemplo, la obtenida en e).

$$V = \iiint\limits_Q dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r\left(\sqrt{6-r^2} - r^2\right) dr\, d\theta = -\tfrac{2}{3}\int_0^{2\pi} \left(2^{\frac{3}{2}} - 6\right)^{\frac{3}{2}} d\theta = 8\sqrt{2\pi}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right)$$

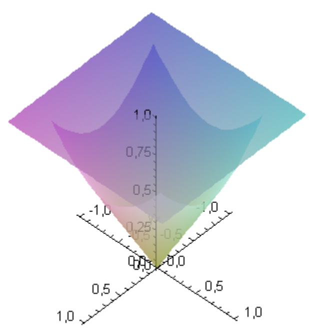
19. Sea *S* la porción del cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ comprendida entre los planos de ecuaciones $z = 0$ y $z = 1$. Determine, utilizando coordenadas esféricas el valor de $\iiint\limits_S \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dV$.

Solución:

La intersección del plano de ecuación $z = 1$ con el cono se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} z = 1 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Las gráficas del cono y del plano se muestran en la figura.



Luego, ambas superficie se intersecan en la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1, \quad z = 1$. En consecuencia la proyección de *S* en el plano *xy* viene dada por el conjunto

$$D = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Se tiene que

$$0 \leq z \leq 1$$

A partir de las ecuaciones de transformación, se tiene

$$z = 1 \Rightarrow \rho \cos\Phi = 1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{\cos\phi}$$

En consecuencia,

$$0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos\phi}$$

De la definición de *D* resulta que

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Finalmente, ϕ varía del eje *z* al cono:

$$\sqrt{x^2+y^2} = z \Rightarrow \rho \cos\phi = \sqrt{\rho^2 \text{sen}^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \text{sen}^2\phi \, \text{sen}^2\theta} \Rightarrow$$

$$\rho^2 \cos^2\phi = \rho^2 \text{sen}^2\phi \ \square \ \cos^2\phi - \text{sen}^2\phi = 0 \ \square \ \cos 2\phi = 0 \Rightarrow 2\phi = \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad 2\phi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4} \quad \text{ó} \quad \phi = \frac{3\pi}{4}$$

Como $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ porque está en el primer octante, se tiene que la solución es $\phi = \frac{\pi}{4}$

Por lo tanto,

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$$

En consecuencia,

$$\iiint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\phi}} \frac{1}{\rho} \rho^2 \text{sen}\,\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{sen}\,\phi}{\cos^2\phi} \, d\phi \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1 \right) d\theta$$

$$= \pi\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

20. Calcule la masa del sólido *S* que se encuentra dentro de la esfera de ecuación $\rho = 2$ y fuera de la esfera de ecuación $\rho = 1$, suponiendo que la densidad de masa en un punto $P(x, y, z)$ cualquiera es proporcional al cuadrado de la distancia del P al centro de la esfera.

Solución:

Se sabe que

$$\mathrm{M}(S) = \iiint_S \delta(x, y, z) \, dV$$

Como la densidad de masa en un punto $P(x, y, z)$ cualquiera es proporcional al cuadrado de la distancia del *P* al centro de la esfera se tiene que

$$\delta(x, y, z) = k \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

En coordenadas esféricas

$$\delta(x,y,z) = k \cdot \rho^2$$

Se tiene que

$$0 \le \theta \le 2\pi \qquad 1 \le \rho \le 2 \quad \text{y} \quad 0 \le \phi \le \pi$$

Luego

$$M(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^{2} k\rho^2 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{31k}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \; d\phi \, d\theta = \frac{62k}{5} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{62k}{5} \cdot 2\pi = \frac{124}{5}\pi k$$

21. Halle el volumen del tetraedro *Q* limitado por el plano de ecuación $bcx + acy + abz = abc$ y los planos coordenados, con *a*, *b* y *c* positivos.

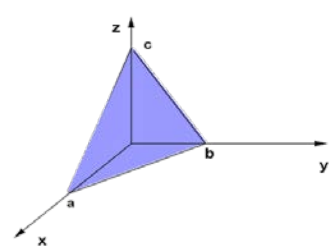
Solución:

Se sabe que

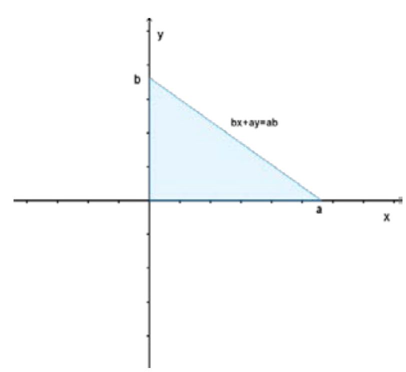
$$V = \iiint_Q dV$$

Nota: observe que este problema es similar al ejercicio 1 resuelto, con $f(x,y,z) = 1$.

La región *Q* está acotada por la parte del plano de ecuación $bcx + acy + abz = abc$ que está en el primer octante y los planos coordenados, por lo que *Q* es la región que se observa en la figura.



La proyección de *Q* sobre el plano *xy* es la región triangular *R*, limitada por las rectas de ecuaciones $bx + ay = ab$, $y = 0$ y $x = 0$, sombreada en la figura.



Cuando $(x,y) \in R$ se tiene que

$$0 \le z \le \frac{abc - acy - bcx}{ab}$$

Luego,

$$\iiint_E dV = \int_0^a \int_0^{b-\frac{bx}{a}} \int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} dz\, dy\, dx = \int_0^a \int_0^{b-\frac{bx}{a}} \left(c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y \right) dy\, dx = c\int_0^a \left[y - \frac{1}{a}xy - \frac{1}{2b}y^2 \right]_0^{b-\frac{b}{a}x} dx$$

$$= c\int_0^a \left[b - \frac{b}{a}x - \frac{1}{a}x\left(b - \frac{b}{a}x \right) - \frac{1}{2b}\left(b - \frac{b}{a}x \right)^2 \right] dx = c\,b\int_0^a \left[1 - \frac{1}{a}x - \frac{1}{a}x\left(1 - \frac{1}{a}x \right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a}x \right)^2 \right] dx$$

$$= c\,b\int_0^a \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{a}x + \frac{1}{2a^2}x^2 \right] dx = cb\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2a}x^2 + \frac{1}{6a^2}x^3 \right) \Big|_0^a = cb\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a + \frac{1}{6}a \right) = \frac{abc}{6}$$

Problemas propuestos

En los problemas del 1 al 6 evalúe la integral planteada.

1. $\int_0^3\int_0^z\int_{-\pi}^{\pi} 2z^3 y\,\mathrm{sen}\,x\,dx\,dy\,dz$ **2.** $\int_0^1\int_{1+x}^{2x}\int_z^{z+x} 2z^3\,x\,dy\,dz\,dx$ **3.** $\int_1^4\int_{z-1}^{2z}\int_0^{y+2z} 2\,dx\,dy\,dz$

4. $\int_{-1}^2\int_1^{x^2}\int_0^{x+y} 16x^2 y\,dz\,dy\,dx$ **5.** $\int_0^2\int_1^z\int_0^{\sqrt{\frac{x}{z}}} 2xyz\,dy\,dx\,dz$ **6.** $\int_0^{\pi}\int_{-2}^2\int_0^y y\,\mathrm{sen}\,x\,dz\,dy\,dx$

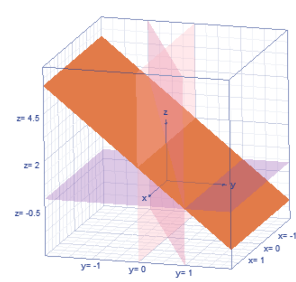
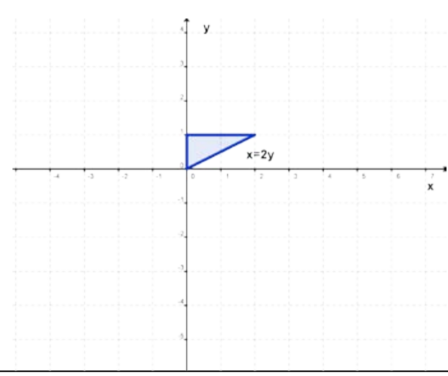
Respuestas: **1)** 0 **2)** $-\frac{37}{70}$ **3)** 189 **4)** 513 **5)** $\frac{2}{3}$ **6)** $\frac{32}{3}$

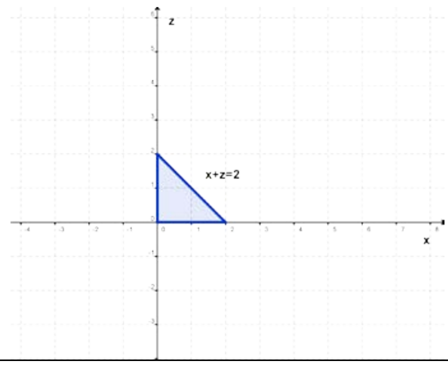
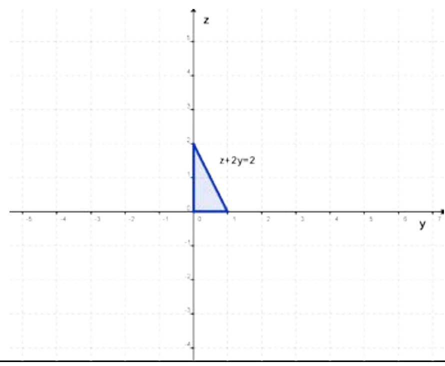
7. Sea $\mathrm{I}=\iiint_Q f(x,y,z)\,dV$, donde *Q* es la región del espacio que está en el primer octante limitada por las gráficas de $z+2y=2$, $x=2y$.

a) Dibuje la región de integración.

b) Dibuje la proyección de *Q* sobre cada uno de los planos coordenados y plantee las integrales $\iiint_Q f(x,y,z)\,dzdydx$, $\iiint_Q f(x,y,z)\,dydxdz$, y $\iiint_Q f(x,y,z)\,dxdzdy$.

Respuesta:

a)	La Región Q es la porción de la región del espacio limitada por la superficie que se muestra en la figura que está en el primer octante.	
b)		Plano *xy* $$I=\int_0^2\int_{\frac{x}{2}}^1\int_0^{2-2y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

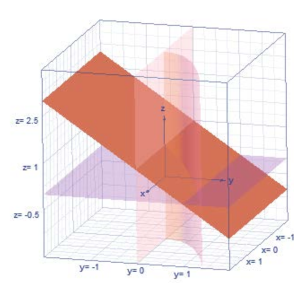
	Plano *xz* $$I=\int_0^2\int_0^{2-z}\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-z}{2}} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$$
	Plano *yz* $$I=\int_0^1\int_0^{2-2y}\int_0^{2y} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$$

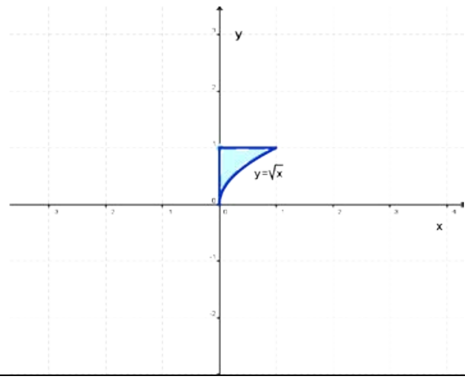
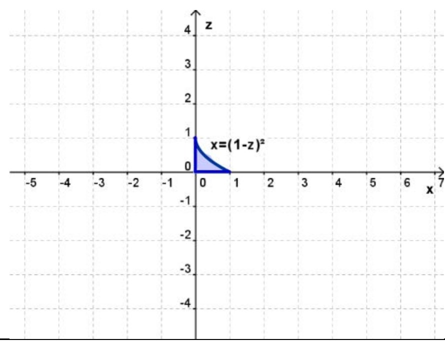
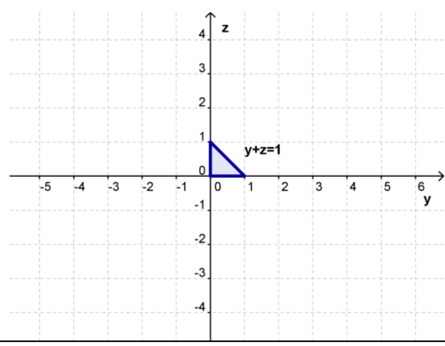
8. Sea $\mathrm{I}=\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dV$, donde *R* es la región del espacio que está en el primer octante limitada por las gráficas de $z+y=1$, $y=\sqrt{x}$.

a) Dibuje la región de integración.

b) Dibuje la proyección de *R* sobre cada uno de los planos coordenados y plantee las integrales $\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dzdydx$, $\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dxdzdy$ y $\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dydxdz$

Respuesta:

a) La Región *R* es la porción de la región del espacio limitada por la superficie que se muestra en la figura que está en el primer octante.	

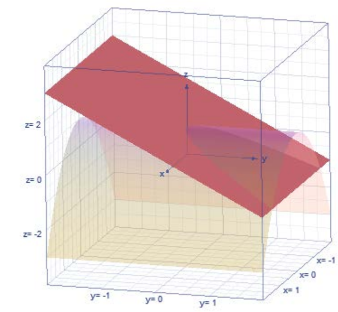
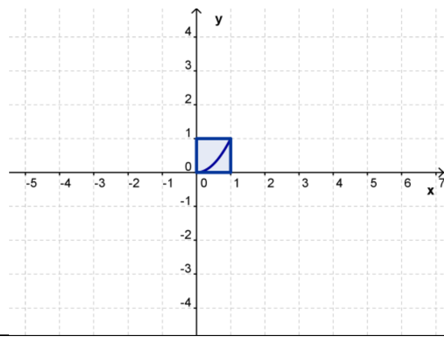
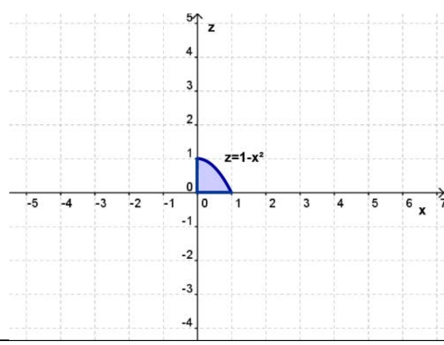
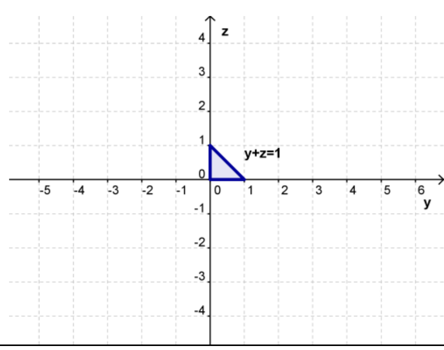
b) 	Plano *xy* $I=\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{x}}^{1}\int_{0}^{1-y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$
	Plano *xz* $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{(1-z)^2}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$
	Plano *yz* $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-y}\int_{0}^{y^2} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$

9. Sea $\mathrm{I}=\iiint\limits_{R} f(x,y,z)\,dV$, donde *R* es la región del espacio que está en el primer octante limitada por las gráficas de $z+y=1$, $z=1-x^2$.

a) Dibuje la región de integración.

b) Dibuje la proyección de *R* sobre cada uno de los planos coordenados y plantee las integrales $\iiint\limits_{R} f(x,y,z)\,dzdydx$, $\iiint\limits_{R} f(x,y,z)\,dxdzdy$ y $\iiint\limits_{R} f(x,y,z)\,dydxdz$

Respuesta:

a) La Región *R* es la porción de la región del espacio limitada por la superficie que se muestra en la figura que está en el primer octante.	
b) 	Plano *xy* $$I=\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^{1-x^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$ $$+\int_0^1\int_{x^2}^{1}\int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$
	Plano *xz* $$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z}}\int_0^{1-z} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$$
	Plano *yz* $$I=\int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{\sqrt{1-z}} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$$

En los problemas del 10 al 13 dibuje el sólido sobre el cual se integra y plantee la integral en el orden indicado.

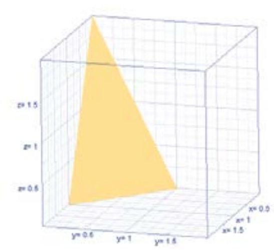
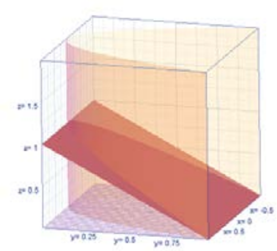
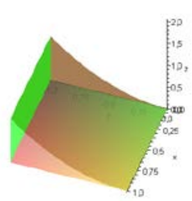
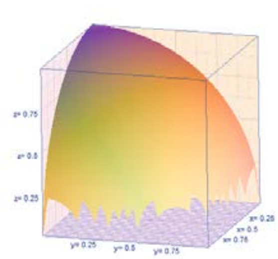
10. $I=\int_0^1\int_0^{2-2y}\int_0^{2-2y-x} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$; $dx\,dy\,dz$

11. $I=\int_0^1\int_0^{1-y}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dz\,dy$; $dz\,dy\,dx$

12. $I=\int_0^1\int_{-1}^0\int_0^{y^2} xyz\,dz\,dy\,dx$ **;** $dy\,dx\,dz$

13. $I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 4e^x\,dz\,dx\,dy$ **;** $dx\,dz\,dy$

Respuestas:

10)		$I=\int_0^2\int_0^{\frac{2-z}{2}}\int_0^{2-2y-z} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$
11)		$I=\int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y} dz\,dy\,dx$
12)		$I=\int_0^1\int_0^1\int_{-1}^{-\sqrt{z}} xyz\,dy\,dx\,dz$
13)		$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{\sqrt{1-y^2-z^2}} 4e^x\,dx\,dz\,dy$

En los problemas del 14 al 17 dibuje el sólido sobre el cual se integra y plantee la integral en coordenadas cartesianas, en el orden que se indica.

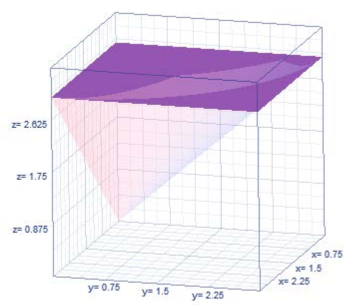
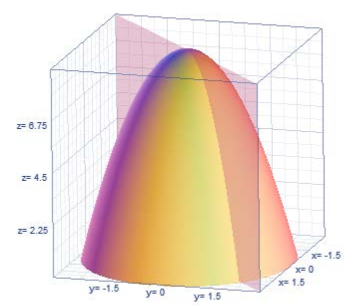
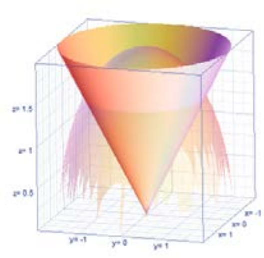
14. $I=\int_{1}^{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r}^{3} r\,\mathrm{dz}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$; $dz\,dy\,dx$

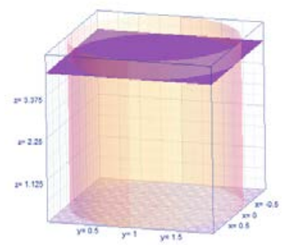
15. $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{3}\int_{0}^{9-r^2} z\,r\,\mathrm{dz}\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\theta$; $dz\,dx\,dy$

16. $I=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{r}^{\sqrt{4-r^2}} 3r^2\cos\theta\,\mathrm{dz}\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\theta$; $dz\,dx\,dy$

17. $I=\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2sen\theta}\int_{0}^{4} 7r\mathrm{dz}\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\theta$; $dz\,dy\,dx$

Respuestas:

14)		$I=\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3}\mathrm{dz}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3}\mathrm{dz}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
15)		$I=\int_{0}^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\int_{y}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} z\,\mathrm{dz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
16)		$I=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 3x\,\mathrm{dz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

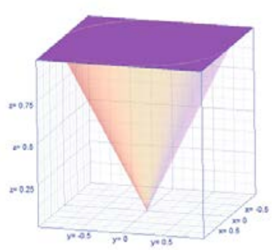
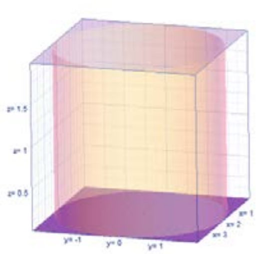
17)		$I=\int_{-1}^{1}\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{4} 7\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

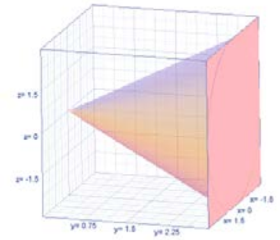
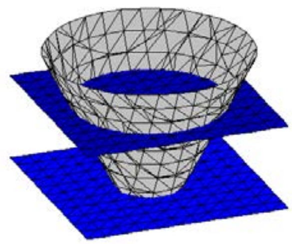
En los problemas del 18 al 21 dibuje el sólido sobre el cual se integra y plantee la integral en coordenadas cilíndricas.

18. $I=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ **19**. $I=\int_{-2}^{2}\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}}\int_{0}^{2} xy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ **20**. $I=\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{3} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$

21. $I=\int_{-9}^{-4}\int_{-\sqrt{81-x^2}}^{\sqrt{81-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{9} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+\int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{81-x^2}}^{-\sqrt{16-x^2}}\int_{0}^{9} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+\int_{-4}^{4}\int_{\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{81-x^2}}\int_{0}^{9} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+\int_{4}^{9}\int_{-\sqrt{81-x^2}}^{\sqrt{81-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{9} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Respuestas:

18)		$I=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\int_{r}^{1} r^2 sen\,\theta\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$
19)		$I=\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{4\cos\theta}\int_{0}^{2} r^3\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

20)		$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_r^{3} r\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\theta$
21)		$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{4}\int_0^{9} r\,\mathrm{dz}\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\theta+\int_0^{2\pi}\int_4^{9}\int_r^{9} r\,\mathrm{dz}\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\theta$

En los problemas del 22 al 25 dibuje el sólido sobre el cual se integra y plantee la integral en coordenadas cartesianas, en el orden que se indica.

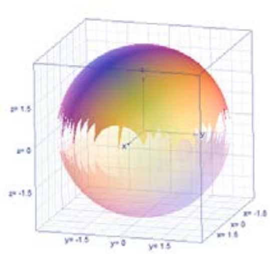
22. $I=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{9}\rho^3 sen^2\,\phi\cos\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,;\ dz\,dx\,dy$

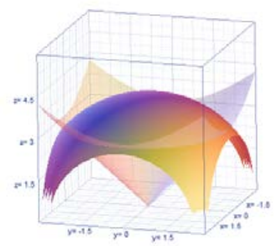
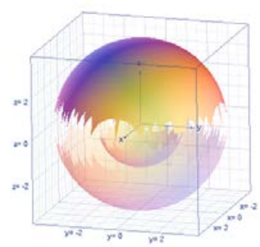
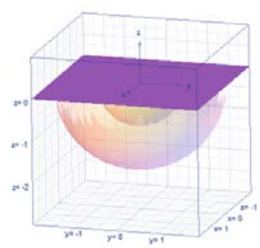
23. $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{2\pi}\int_0^{4}\rho^2 sen\,\phi\ \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,;\ dz\,dy\,dx$

24. $I=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_2^{4}\rho^2 sen\,\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,;dz\,dy\,dx$

25. $I=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_1^{2}\rho^3 sen\,\phi\cos\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,;\ dz\,dx\,dy$

Respuestas:

22)		$I=\int_{-9}^{9}\int_{-\sqrt{81-y^2}}^{\sqrt{81-y^2}}\int_{-\sqrt{81-x^2-y^2}}^{\sqrt{81-x^2-y^2}} x\,\mathrm{dz}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$

23)		$I=\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{12-x^2}}^{\sqrt{12-x^2}}\int_{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \mathrm{dz}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
24)		$I=\int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}\int_{-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \mathrm{dz}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x-\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \mathrm{dz}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
25)		$I=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{0} z\,\mathrm{dz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{0} z\,\mathrm{dz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

En los problemas del 26 al 29 dibuje el sólido sobre el cual se integra y plantee la integral en coordenadas esféricas.

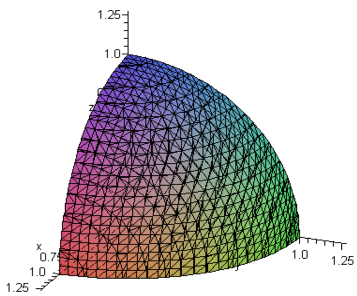
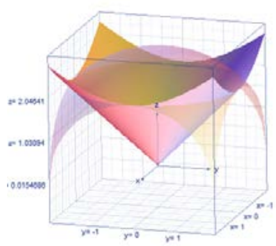
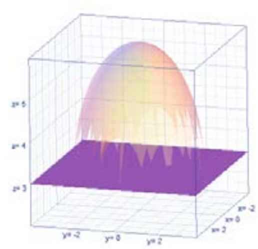
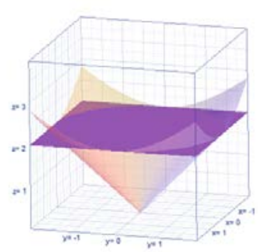
26. $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} y^2\,dz\,dy\,dx$

27. $I=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z\,dz\,dy\,dx$

28. $I=\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{3}^{3+\sqrt{9-x^2-y^2}} x\,dz\,dy\,dx$

29. $I=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} dz\,dy\,dx$

Respuestas:

26)		$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{1} \rho^4 \operatorname{sen}^3\Phi\, sen^2\theta\, d\rho\, d\theta d\Phi$
27)		$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} \rho^3 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, d\rho\, d\theta d\Phi$
28)		$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\int_{3\sec\phi}^{6\cos\phi} \rho^3 \operatorname{sen}^2\Phi \cos\theta\, d\rho\, d\theta d\Phi$
29)		$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\sec\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\Phi\;\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

30. Plantee y calcule una integral triple para hallar el volumen del sólido limitado por las gráficas de ecuaciones: $x = 4 - y^2$, $z = 0$, $z = x$, con $y \geq 0$

Respuesta: $V(Q) = \iiint_Q dV = \int_0^2 \int_0^{4-y^2} \int_0^x \; dz\, dx\, dy = \dfrac{128}{15}$

31. Plantee y calcule, en coordenadas cilíndricas, la integral que da el volumen del sólido *Q* acotado por las gráficas de las superficies de ecuaciones $z = 2$, $z = 4$, $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 25$

Respuesta: $V(Q) = \int_0^{2\pi} \int_1^5 \int_2^4 \; r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta = 48\pi$

32. Plantee y calcule, en coordenadas esféricas, la integral que da el volumen del sólido *Q* acotado por las gráficas de las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Respuesta: $V(Q) = \int_0^{2\pi} \int_1^5 \int_0^{\pi} \; \rho^2 \operatorname{sen}\phi \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta = \dfrac{496\,\pi}{3}$

33. Calcule el volumen del sólido que está encima del cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$

Respuesta: 8π

34. Calcule el volumen del sólido acotado por las superficies de ecuaciones $z = y^2$, $z = 0$, $x = 1$, $x = 0$, $y = -1$, $y = 0$.

Respuesta: $\dfrac{1}{3}$

35. Demuestre usando integrales triples que el volumen de un cilindro de radio *R* y altura *h* es $V = \pi R^2 h$.

36. Demuestre usando integrales triples que el volumen de una esfera de radio *R* es $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

37. Calcule la masa del sólido que está dentro de la esfera de ecuación $\rho = 2$ y fuera de la esfera de ecuación $\rho = 1$, suponiendo que la densidad de masa en un punto *P* es directamente proporcional al cuadrado de la distancia de *P* al centro de la esfera.

Respuesta: $\dfrac{124k\,\pi}{5}$ (k es la constante de proporcionalidad)

38. Halle la masa de un sólido cilíndrico de altura *h* y radio *a*, suponiendo que la densidad en cada punto $P(x, y, z)$ es proporcional a la distancia entre el punto *P* y la base del sólido.

Respuesta: $\dfrac{Kh^2a^2\pi}{2}$ (k es la constante de proporcionalidad)

39. Determine las coordenadas del centro de masa de un sólido de densidad constante que está acotado inferiormente por el plano *xy*, superiormente por el cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y lateralmente por el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Respuesta: $x_M = y_M = 0, \quad z_M = \dfrac{3}{8}$

40. Halle el momento de inercia con respecto a cada uno de los ejes de coordenadas del sólido definido por: $-\dfrac{a}{2} \leq x \leq \dfrac{a}{2}$, $-\dfrac{b}{2} \leq y \leq \dfrac{b}{2}$ y $-\dfrac{c}{2} \leq z \leq \dfrac{c}{2}$, si este tiene densidad de masa *δ* constante.

Respuesta: $I_x = \dfrac{abc\delta}{12}\left(b^2 + c^2\right),\ I_y = \dfrac{abc\delta}{12}\left(a^2 + c^2\right), I_z = \dfrac{abc\delta}{12}\left(a^2 + b^2\right)$

BIBLIOGRAFÍA

- ANTON, H.,BIVENS, I. Y DAVIS, S. (2009). *Cálculo. Trascendentes Tempranas*. 2ª ed. México: Limusa, S.A. de C. V. Grupo Noriega Editores.

- LARSON, HOSTETLER Y EDWARDS. (2006). *Cálculo* II. 8ª ed. México: McGraw-Hill Interamericana

- LEITHOLD, L. (2008). *El Cálculo.* 7a ed. México: Oxford University Press México, S.A. de C.V.

- PENNEY, E. (2008). *Cálculo con Trascendentes Tempranas*. 7ª ed. México: Pearson Educación de México, S.A. de C. V

- PITA, C. (1995). *Cálculo Vectorial*. 1ª ed. México: Pretince Hall Hispanoamericana, S.A.

- PURCELL, E., VARBERG, D. Y RIGDON, S. (2007). *Cálculo.* 9a ed. México: Pearson Educación de México, S.A. de C. V.

- STEWART, J. (2012). *Cálculo de varias Variables. Trascendentes Tempranas*. 7ª ed. México: Cengage Learning.

- THOMAS, G. (2006). *Cálculo Varias Variables*. 11ª ed. México: Pearson Educación de México, S.A. de C. V