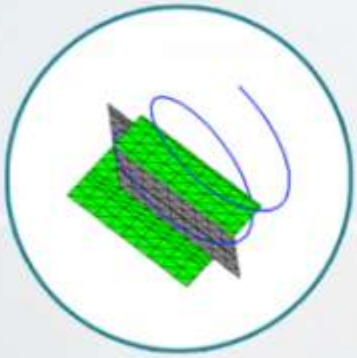
EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE FUNCIONES VECTORIALES



AÍDA MONTEZUMA, EDDY ABREU YJULIO DAZA

UNIVERSIDAD METROPOLITANA

EJERCICIOS Y PROBLEMAS
DE FUNCIONES VECTORIALES

AÍDA MONTEZUMA, EDDY ABREU Y JULIO DAZA

Universidad Metropolitana,
Caracas, Venezuela, 2018

Hecho el depósito de Ley

Depósito Legal:
ISBN:

Formato: 21,5 X 27,9 cms.
Nº de páginas: 127

Diseño de la portada
Anabella Spinetti

Reservados todos los derechos.

Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse,
registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información,
en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético
o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso por escrito del editor.

Autoridades

Hernán Anzola
Presidente del Consejo Superior

Benjamín Scharifker
Rector

María del Carmen Lombao
Vicerrectora Académica

María Elena Cedeño
Vicerrectora Administrativa

Mirian Rodríguez de Mezoa
Secretario General

Comité Editorial de Publicaciones
de apoyo a la educación

Prof. Roberto Réquiz
Prof. Natalia Castañón
Prof. Mario Eugui
Prof. Humberto Njaim
Prof. Rossana París
Prof. Alfredo Rodríguez Iranzo (Editor)

A la memoria de mi madre, Aída Riviello de Montezuma.
A.M.

Al que todo lo puede.
E.A.

Con especial cariño a mis alumnos y ex alumnos de Matemática V.
J.D.

INTRODUCCIÓN

La presente publicación ha sido elaborada con el propósito de contribuir y facilitar el aprendizaje de los distintos temas del cálculo vectorial.

Al principio de cada capítulo se presenta un resumen de las definiciones, teoremas y propiedades más importantes que se requieren para la resolución de los ejercicios y problemas. En la solución de los problemas se ha tratado de utilizar un lenguaje sencillo, claro y preciso que facilite la comprensión de conceptos, propiedades y teoremas importantes, y que además propicie la adquisición de las destrezas necesarias para realizar cálculos con precisión. Los ejercicios resueltos han sido escogidos de tal forma que involucren los aspectos más importantes de los temas a estudiar en este curso. Se incluyen además ejercicios integradores de asignaturas previas que permitan establecer relaciones entre ellas.

La sección "Problemas propuestos" tiene por finalidad incentivar en el estudiante la revisión y aplicación de los conceptos estudiados y además, que adquiera destrezas técnicas y compruebe por sí mismo el progreso alcanzado.

El libro consta de seis capítulos, contiene 89 ejercicios resueltos y 224 ejercicios propuestos con sus respuestas. Además se incluyen algunas gráficas de regiones planas y superficies en el espacio que son indispensables para visualizar de forma más simple la resolución de algunos problemas. Los contenidos que se desarrollan en cada uno de los seis capítulos se especifican a continuación.

El capítulo 1 contiene un breve estudio de ecuaciones paramétricas. El capítulo 2 trata funciones vectoriales y curvas en el espacio. Luego, en el capítulo 3 se estudian las integrales de línea con algunas de sus aplicaciones. En los capítulos 4 se estudia el teorema de Green. El capítulo 5 trata las integrales de superficie con algunas de sus aplicaciones. Finalmente, el capítulo 6 estudia el teorema de Stokes y el teorema de Gauss.

Por último, queremos expresar nuestro agradecimiento a los profesores y estudiantes que con sus observaciones y sugerencias a la guía de Matemática V, contribuyeron a mejorar el material.

Nota: Las figuras en tres dimensiones fueron elaboradas con el software MAPLE 12, y las gráficas en dos dimensiones se hicieron con el software GEOGEBRA.

CONTENIDOS

ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Definiciones, propiedades y teoremas importantes

Definición 1.1: Si *f* y *g* son funciones continuas de *t* en un intervalo I , entonces las ecuaciones

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t)$$

se denominan ecuaciones parámetricas y a *t* se le denomina parámetro. Al variar *t* se obtiene un punto de la forma $(x, y) = (f(t), g(t))$ que cambia de posición y describe una curva *C* en el plano llamada curva paramétrica.

Teorema 1.1: Si la curva *C* está dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, entonces la pendiente de *C* en (x,y) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{si} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

Y además,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

Definición 1.2: Una curva C representada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ en un intervalo I se denomina suave si las funciones *f ´* y *g´* son continuas en I y no simultáneamente nulas, excepto quizás en los puntos terminales. La curva es suave a trozos, si existe alguna partición del intervalo en la cual la curva es suave en todo subintervalo de dicha partición.

Teorema 1.2: Sea *C* la gráfica de una ecuación de la forma $y = F(x) \geq 0$, si *C* es una curva suave dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$ y *C* no se corta a sí misma, excepto quizás en los puntos terminales, cuando *t* crece de α hasta β entonces el área bajo la curva está dada por

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)\, f´(t)\, dt \quad \text{si } \left(f(\alpha), g(\alpha)\right) \text{ está en el extremo izquierdo.}$$

Teorema 1.2: Si la curva *C* está dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, donde *f´*y *g´*son continuas en $[\alpha, \beta]$ y C no se corta a sí misma (excepto quizás en los puntos terminales) cuando *t* aumenta de de α hasta β, la longitud de arco de *C* es

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Problemas resueltos

1. Dada la curva con ecuaciones paramétricas $y = 4\,\text{sen}\,t$ y $x = 9\cos t$, con $0 < t \leq 2\pi$.

a) Halle los puntos de la curva donde la recta tangente es horizontal.

b) Halle los puntos de la curva donde la recta tangente es vertical.

c) Elimine el parámetro *t* e identifique la ecuación cartesiana de la curva obtenida.

d) Plantee la integral que da la longitud de la curva.

Solución:

a) $y = 4\,\text{sen}\,t \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = 4\cos t \qquad x = 9\cos t \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = -9\,\text{sen}\,t$

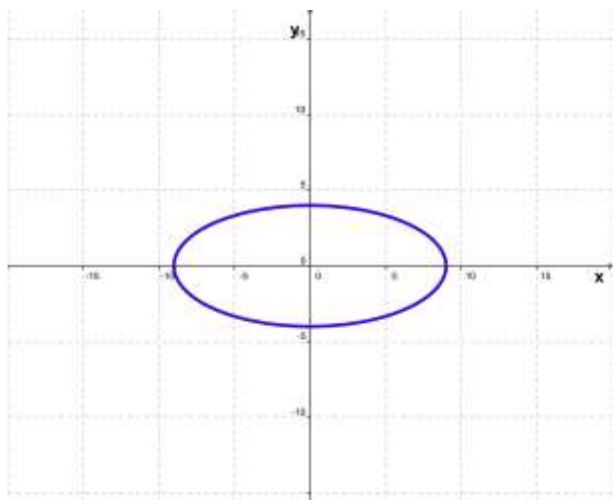
Luego, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4\cos t}{9\,\text{sen}\,t}$; $\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \quad y \quad \text{sen}\,t \neq 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad t = \dfrac{3\pi}{2}$

Los puntos de la curva donde la recta tangente es horizontal son: $P_1(0,4)$ y $P_2(0,-4)$.

b) $\dfrac{dy}{dx} \to \infty$ si $\text{sen}\,t = 0 \quad y \quad \cos t \neq 0 \Rightarrow t = \pi \quad o \quad t = 2\pi$

Los puntos de la curva donde $\dfrac{dy}{dx}$ no existe, y por lo tanto la recta tangente es vertical son: $P_3(9,0)$ y $P_4(-9,0)$.

c) Observe que $\dfrac{y}{4} = \text{sen}\,t$ y $\dfrac{x}{9} = \cos t$, luego $\dfrac{y^2}{16} + \dfrac{x^2}{81} = 1$, la cual corresponde a la ecuación de una elipse de centro el origen, que interseca al eje *x* en los puntos de coordenadas $P_3(9,0)$ y $P_4(-9,0)$ e interseca al eje *y* en los puntos de coordenadas $P_1(0,4)$ y $P_2(0,-4)$, mostrada en la figura.



d) $$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{81\,\text{sen}^2 t + 16\cos^2 t}\, dt$$

2. Dada la curva con ecuaciones paramétricas $y = b\,\text{sen}\,t$ y $x = a\cos t$, con $0 < t \leq 2\pi$.

a) Halle los puntos de la curva donde la recta tangente es horizontal.

b) Halle los puntos de la curva donde la recta tangente es vertical.

c) Elimine el parámetro *t* e identifique la ecuación cartesiana de la curva obtenida.

Solución:

a) $y = b\,\text{sen}\,t \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = b\cos t$ $\qquad$ $x = a\cos t \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = -a\,\text{sen}\,t$

Luego, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b\cos t}{a\,\text{sen}\,t}$; $\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \quad y \quad \text{sen}\,t \neq 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \quad o \quad t = \dfrac{3\pi}{2}$

Los puntos de la curva donde la recta tangente es horizontal son: $P_1(0, b)$ y $P_2(0, -b)$.

b) $\dfrac{dy}{dx} \to \infty$ si $\text{sen}\,t = 0 \quad y \quad \cos t \neq 0 \Rightarrow t = \pi \quad o \quad t = 2\pi$

Los puntos de la curva donde la recta tangente es vertical son: $P_3(a, 0)$ y $P_4(-a, 0)$.

c) Observe que $\dfrac{y}{b} = \text{sen}\,t$ y $\dfrac{x}{a} = \cos t$, luego $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{x^2}{a^2} = 1$, la cual corresponde a la ecuación de una elipse de centro el origen, que interseca al eje *x* en los puntos de coordenadas $P_3(a, 0)$ y $P_4(-a, 0)$ e interseca al eje *y* en los puntos de coordenadas $P_1(0, b)$ y $P_2(0, -b)$.

3. Sea *C* la curva de ecuaciones paramétricas

$$x = t^3 + 4t \qquad\qquad y = 6t^2$$

a) Halle, si es posible, los puntos de la curva C donde la recta tangente es paralela a la recta *L* de ecuaciones $x = -\dfrac{7t}{2}$, $y = 6t - 10$.

b) Estudie la concavidad de la curva.

Solución:

a) $y = 6t^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = 12t$ y $x = t^3 + 4t \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = 3t^2 + 4$

Luego, la pendiente de la recta tangente a la curva *C* en un punto $P(x(t_0), y(t_0))$ es:

$$m = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{12t_0}{3t_0^2 + 4}$$

Para hallar la pendiente de la recta de ecuaciones $x = -\dfrac{7t}{2}$, $y = 6t - 10$, se elimina el parámetro *t* como sigue:

$$x = -\frac{7t}{2} \Rightarrow t = -\frac{2x}{7}, \text{ de donde } y = 6\left(-\frac{2x}{7}\right) - 10 = -\frac{12}{7}x - 10$$

Por lo tanto la pendiente de la recta L es: $-\dfrac{12}{7}$.

Ambas rectas son paralelas si:

$$\frac{12t_0}{3t_0{}^2+4}=-\frac{12}{7}\Leftrightarrow 7t_0=-3t_0^2-4\Leftrightarrow 3t_0^2+7t_0+4=0\Rightarrow t_0=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{6}=\frac{-7\pm 1}{6}$$

$$\Rightarrow t_0=-\frac{4}{3}\quad ó\quad t_0=-1.$$

Si $t=-\dfrac{4}{3}$ entonces $x=\left(-\dfrac{4}{3}\right)^3+4\left(-\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{208}{27}$ y $y=6\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{32}{3}$

Si $t=-1$ entonces $x=(-1)^3+4(-1)=-5$ y $y=6(-1)^2=6$

Por lo tanto, la recta tangente a la curva *C* en los puntos $P_1(-5,6)$ y $P_2\left(-\dfrac{208}{27},\dfrac{32}{3}\right)$ es paralela a la recta *L*.

b) Para estudiar la concavidad de la curva se debe calcular $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{12\left(4-3t^2\right)}{\left(3t^2+4\right)^3}>0$$

Como $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$ para $t\in\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ para $t\in\left(-\infty,-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}},+\infty\right)$, la curva es cóncava hacia arriba para $t\in\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ y es cóncava hacia abajo si $t\in\left(-\infty,-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}},+\infty\right)$.

4. Dada la curva *C* de ecuaciones paramétricas: $\begin{cases}x=t^2-2\\ y=t^3+t\end{cases}$. Determine, si existe, el punto de *C*, donde su recta tangente es perpendicular a la recta L de ecuación $y+\sqrt{3}\,x+3=0$.

Solución:

La pendiente de la recta L es $m=-\sqrt{3}$.

En un punto cualquiera de la curva *C* se tiene que:

$$x = t^2 - 2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t \quad \text{y} \quad y = t^3 + t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 1$$

Luego, la pendiente de la recta tangente en un punto de la curva C de coordenadas $(x(t), y(t))$ es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 1}{2t}$$

La recta tangente es perpendicular a la recta *L* si y sólo si

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{3t^2 + 1}{2t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3\sqrt{3}t^2 - 2t + \sqrt{3} = 0$$

Como la ecuación anterior no tiene raíces reales, se concluye que en ningún punto de la curva *C* la recta tangente es perpendicular a la recta *L*.

5. Si las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \cos 2t$ dan la posición de un punto $P(x, y)$ al tiempo *t*, describa el movimiento del punto durante el intervalo de tiempo $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Justifique su respuesta.

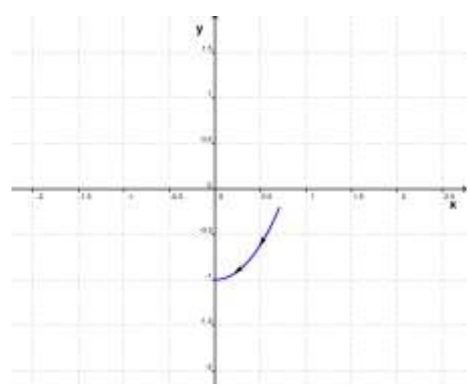
Solución:

$$x = \cos t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad y = \cos 2t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -2\operatorname{sen} 2t .$$

Para $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}$ se tiene que $\frac{dx}{dt} = -\operatorname{sen} t < 0$, luego, el punto P se desplaza hacia la izquierda.

Por otra parte, si $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}$ se tiene que $\frac{\pi}{2} \le 2t \le \pi$, luego $\frac{dy}{dt} = -2\operatorname{sen} 2t < 0$, en consecuencia, el punto P se desplaza hacia abajo.

Por lo tanto, el punto P parte de $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ y baja hacia la izquierda hasta llegar al punto $(0, -1)$, como se muestra en la figura.



6. Sea *C* la curva de ecuaciones paramétricas:

$$x = t \qquad y = \ln t \qquad \text{con } t > 0$$

a) Halle, si es posible, los puntos de la curva donde la recta tangente es horizontal y donde la recta tangente es vertical.
b) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva cuando $t = 1$.
c) Halle la ecuación de *C* en coordenadas cartesianas.

Solución:

a) $$y = \ln t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \quad \text{y} \quad x = t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1$$

Luego

$$m = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{t}}{1} = \frac{1}{t}, \text{ para } t \neq 0$$

En ningún punto de la curva la recta tangente es horizontal y en ningún punto de la curva la recta tangente es vertical.

b) Si $t = 1$, se tiene que:

$$x = 1 \,, \quad y = 0 \quad \text{y} \quad m = 1$$

Luego,

La ecuación de la recta tangente cuando $t = 1$ es:

$$y = x - 1$$

c) $$y = \ln t \Rightarrow e^{y} = t$$

Luego,

$$x = e^{y} \quad \text{ó} \quad y = \ln x \,, \; x > 0$$

7. Sea *C* la curva de ecuaciones paramétricas:

$$x = \ln\left(t^2 + 1\right) \qquad y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

a) Halle, si es posible, los puntos de la curva donde la recta tangente es horizontal y donde la recta tangente es vertical.
b) Determine la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva cuando $t = 1$
c) Halle la ecuación de *C* en coordenadas cartesianas.

Solución:

a) $$x=\ln\left(t^2+1\right)\Rightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{t^2+1} \quad \text{y} \quad y=\frac{t^2-1}{t^2+1}\Rightarrow\frac{dy}{dt}=\frac{\left(t^2+1\right)2t-2t\left(t^2-1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{4t}{\left(t^2+1\right)^2}$$

Luego,

$$m=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{4t}{\left(t^2+1\right)^2}}{\frac{2t}{t^2+1}}=\frac{2}{t^2+1}\text{, para } t\neq 0$$

En ningún punto de la curva la recta tangente es horizontal y en ningún punto de la curva la recta tangente es vertical.

b) Si $t=1$, se tiene que:

$$x=\ln 2\ , \quad y=0 \quad \text{y} \quad m=1$$

Luego,

La ecuación de la recta tangente cuando $t=1$ es:

$$y=x-\ln 2$$

La ecuación de la normal tangente cuando $t=1$ es:

$$y=-\left(x-\ln 2\right)$$

c) $$x=\ln\left(t^2+1\right)\Rightarrow e^x=t^2+1\Rightarrow t^2=e^x-1$$

Luego,

$$y=\frac{t^2-1}{t^2+1}=\frac{e^x-2}{e^x}$$

O también

$$y=1-2e^{-x}$$

8. Halle una ecuación paramétrica de la recta de ecuación $2y+x-3=0$.

Solución:

Sea $y=t$, entonces $x=3-2t$. Luego, unas ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$y=t\ , \quad x=3-2t \quad \text{con} \quad t\in R$$

9. Halle una ecuación paramétrica de la circunferencia de ecuación $\left(x+5\right)^2+\left(y-3\right)^2=36$.

Solución:

Observe que si se realiza el cambio

$$x+5=6\cos t \quad \text{y} \quad y-3=6\operatorname{sen} t$$

Se satisfacen la ecuación:

$$(x+5)^2+(y-3)^2=36\cos^2 t+36\operatorname{sen}^2 t=36$$

En consecuencia, unas ecuaciones paramétricas de la circunferencia son:

$$x=-5+6\cos t\,, \quad y=3+6\operatorname{sen} t \quad \text{con} \quad 0\le t\le 2\pi$$

10. Halle una ecuación paramétrica de la parábola de ecuación $y=(x-1)^2+3$.

Solución:

Sea $x=t$, entonces $y=(t-1)^2+3$. Luego, unas ecuaciones paramétricas de la parábola son:

$$x=t\,, \quad y=(t-1)^2+3 \quad \text{con} \quad t\in R$$

11. Halle una ecuación paramétrica de la hipérbola de ecuación $x^2-\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$.

Solución:

Observe que para $x\ge 1$

$$x=\cosh t \quad \text{y} \quad \frac{y-1}{2}=\operatorname{senh} t$$

¿Por qué debe ser $x\ge 1$?

Satisfacen la ecuación:

$$x^2-\frac{(y-1)^2}{4}=\cosh^2 t-\operatorname{senh}^2 t=1$$

Para $x\le -1$, basta considerar $x=-\cosh t$ y $\dfrac{y-1}{2}=\operatorname{senh} t$

En consecuencia, unas ecuaciones paramétricas de la hipérbola son:

Para $x\ge 1$: $x=\cosh t\,, \quad y=1+\operatorname{senh} t$ con $t\in R$

Para $x\le -1$: $x=\cosh t\,, \quad y=1+\operatorname{senh} t$ con $t\in R$

12. Halle una ecuación paramétrica de la elipse de ecuación $\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$

Solución:

Observe que

$$\frac{x+1}{2}=\cos t \quad \text{y} \quad \frac{y+2}{3}=\operatorname{sen} t$$

Satisfacen la ecuación:

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t=1$$

En consecuencia, unas ecuaciones paramétricas de la circunferencia son:

$$x=-1+2\cos t\,,\quad y=-2+3\operatorname{sen} t \quad \text{con} \quad 0\le t\le 2\pi$$

13. Parametrice la curva C de ecuación $(2y+x)^2=-4y(2-x)-4(x+1)$.

Solución:

$$(2y+x)^2=-4y(2-x)-4(x+1)\Rightarrow 4y^2+4yx+x^2=-8y+4yx-4x-4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4y^2+x^2=-8y-4x-4\Rightarrow 4y^2+8y+x^2+4x+4=0\Rightarrow 4\left(y^2+2y+1\right)+x^2+4x+4=4$$
$$\Rightarrow 4(y+1)^2+(x+2)^2=4\Rightarrow (y+1)^2+\frac{(x+2)^2}{4}=1$$

Observe que se obtiene la ecuación de una elipse, y

$$\frac{x+2}{2}=\cos t \quad \text{y} \quad y+1=\operatorname{sen} t$$

satisfacen la ecuación:

$$\frac{(x+2)^2}{4}+(y+1)^2=\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t=1$$

En consecuencia, unas ecuaciones paramétricas de la curva C son:

$$x=-2+2\cos t\,,\quad y=-1+\operatorname{sen} t \quad \text{con} \quad 0\le t\le 2\pi$$

14. Bosqueje la gráfica del movimiento de una partícula que se desplaza sobre la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x=1+e^t$ y $y=t^2$.

Solución:

Observe que

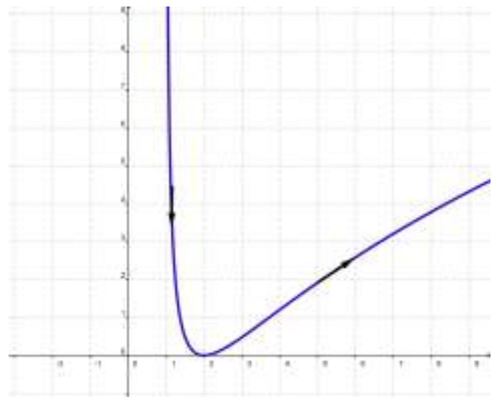
$$\frac{dx}{dt}=e^t>0 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt}=2t\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2t}{e^t}=0\Leftrightarrow t=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{2e^t-2te^t}{e^{2t}}}{e^t}=\frac{2(1-t)}{e^{2t}}=0\Leftrightarrow t=1$$

Si $t=0$ entonces $x=2$ y $y=0$, y si $t=1$ entonces $x=1+e$ y $y=1$,

Luego, la partícula se desplaza hacia abajo para $t\in(-\infty,0)$ y luego se desplaza hacia arriba para $t\in(0,+\infty)$.

La curva tiene concavidad hacia arriba para $t\in(-\infty,1)$ y concavidad hacia abajo para $t\in(1,+\infty)$.



15. Una cicloide es la curva que traza un punto P en el borde de una rueda de radio *a* cuando ésta gira a lo largo de una recta, sin resbalar. Se puede demostrar que las ecuaciones paramétricas de la cicloide son $x=a$, $y=a$ donde θ es la medida en radianes del ángulo en el sentido de las manecillas del reloj que ha girado el segmento que une el punto P y el centro de la rueda desde su posición vertical.

a) Determine la longitud de un arco de cicloide con $a=1$.
b) Determine el área de la región comprendida entre un arco de cicloide y el eje *x* con $a=1$.

Solución:

a) $$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta \text{ y } \frac{dy}{d\theta}=\operatorname{sen}\theta$$

Luego,

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(1-\cos\theta)^2+\operatorname{sen}^2\theta=4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

En consecuencia,

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\,sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,d\theta=2\int_0^{2\pi}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|d\theta=2\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta=-4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=-4(\cos\pi-\cos 0)=8$$

b)

$$A=\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)\frac{d(\theta-sen\,\theta)}{d\theta}=\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\cos^2\theta\right)d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta=\frac{3}{2}\theta - 2\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\ \Big|_0^{2\pi}=3\pi$$

16. Sea *C* la curva intersección de la superficie de ecuación $4x^2+y^2-2y+1=4$ con el plano de ecuación $z=2y$. Parametrice la curva *C*.

Solución:

Observe que

$$4x^2+y^2-2y+1=4 \Rightarrow 4x^2+(y-1)^2=4 \Rightarrow x^2+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

Luego, la curva *C* puede ser parametrizada como:

$$x=\cos t\,,\quad y=1+2\operatorname{sen}t\,,\quad z=2+4\operatorname{sen}t\,,\ \text{con}\ \ 0\le t\le 2\pi$$

Problemas propuestos

En los problemas del 1 al 6 elimine el parámetro y obtenga una relación entre *x* y *y*.

1. $x = s - 1,\ y = s^2$ **2.** $x = 3\cos\theta,\ y = 2\operatorname{sen}\theta$ **3.** $x = 3\sec t,\ y = 2\tan t$

4. $x = t^2 + 2t + 3,\ y = t^2 + t - 1$ **5.** $x = e^s,\ y = e^{-s}$ **6.** $x = \ln t,\ y = e^{2t}$

Respuestas: **1)** $y = (x+1)^2$ **2)** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **3)** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ **4)** $x^2 - 2xy + y^2 - 7x + 6y + 11 = 0$ **5)** $xy = 1$
6) $x = \ln(\ln y) - \ln 2$

En los problemas del 7 al 12 calcule $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$.

7. $x = 3t - 2,\ y = 4 - 5t$ **8.** $x = t^2 + 1,\ y = t^3 + 2t$ **9.** $x = 4\operatorname{sen}\theta,\ y = 2\cos\theta$

10. $x = t^2 - 2,\ y = 3e^{2t}$ **11.** $x = 2\operatorname{sen}\theta,\ y = \operatorname{sen}2\theta$ **12.** $x = e^s\ \ y = e^{-s}$

Respuestas: **7)** $\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{3},\ \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ **8)** $\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2+2}{2t},\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3t^2-2}{4t^3}$ **9)** $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\tan\theta,\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{8}\sec^3\theta$
10) $\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{2t}}{t},\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3e^{2t}(2t-1)}{2t^3}$ **11)** $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta},\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos 2\theta \operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta \operatorname{sen} 2\theta}{2\cos^3\theta}$ **12)** $\frac{dy}{dx} = \frac{e^s - e^{-s}}{2e^{2s}}$,
$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{3-e^{2s}}{e^{5s}}\right)$

En los problemas del 13 al 18 halle la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal en el punto correspondiente al valor del parámetro dado

13. $x = t^2 + 1,\ y = t^3 + 2t,\ \ t = -2$ **14.** $x = e^{2t},\ y = t^2 + 2,\ \ t = 1$

15. $x = 4\cos\theta,\ y = 2\operatorname{sen}\theta,\ \ \theta = \frac{\pi}{6}$ **16.** $x = 4s^2 + 2s,\ y = 4s^3,\ \ s = \frac{1}{2}$

17. $x = e^{2s},\ y = e^s + e^{-s},\ \ s = 0$ **18.** $x = 2\cos^3\theta,\ y = 2\operatorname{sen}^3\theta,\ \theta = \frac{\pi}{4}$

Respuestas: **13)** Tangente: $2y + 7x - 11 = 0$; Normal: $7y - 2x + 94 = 0$ **14)** Tangente: $e^2y - x - 2e^2 = 0$;
Normal: $y + e^2x - 3 - e^4 = 0$ **15)** Tangente: $2y + \sqrt{3}x - 8 = 0$; Normal: $\sqrt{3}y - 2x + 3\sqrt{3} = 0$
16) Tangente: $2y - x + 1 = 0$; Normal: $y + 2x - \frac{9}{4} = 0$ **17)** Tangente: $y - 2 = 0$; Normal: $x - 1 = 0$
18) Tangente: $y + x - \sqrt{2} = 0$; Normal: $y - x = 0$

En los problemas del 19 al 24 encuentre los valores del parámetro en los cuales *x* y *y* son crecientes y en los que son decrecientes.

19. $x = 3t - 2,\ y = 4 - 5t\ ,\ t \in R$ **20.** $x = t^2 + 1,\ y = t^3 + 2t,\ t \in R$

21. $x = 4\operatorname{sen}\theta$, $y = 2\cos\theta$, $-\pi < \theta < \pi$ **22**. $x = t^2 - 2$, $y = 3e^{2t}$

23. $x = 2\cos\theta$, $y = \operatorname{sen}2\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ **24**. $x = e^{2s}$, $y = e^s + e^{-s}$, $s \in R$

Respuestas: **19**) *x* crece para todo *t*, *y* decrece para todo *t* **20**) *x* crece para $t > 0$ y decrece para $t < 0$; *y* crece para todo *t*
21) *x* crece para todo $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y decrece para $\theta \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ y para $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, y crece para $\theta \in (-\pi, 0)$ y decrece para $\theta \in (0, \pi)$

22) *x* crece para $t > 0$ y decrece para $t < 0$; *y* crece para todo *t* **23**) *x* crece para $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y decrece para $\theta \in (0, \pi)$;
y crece para $\theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ y para $\theta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$; *y* decrece para $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ y para $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ **24**) *x* crece para todo *s*; y crece para $s > 0$ y decrece para $s < 0$

En los problemas del 25 al 30 encuentre los valores del parámetro en los cuales la curva es cóncava hacia arriba y en los que es cóncava hacia abajo.

25. $x = 3t - 2$, $y = 4 - 5t$, $t \in R$ **26**. $x = t^2 + 1$, $y = t^3 + 2t$, $t \in \left(0, \sqrt{2}\right)$

27. $x = 4\operatorname{sen}\theta$, $y = 2\cos\theta$, $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ **28**. $x = t^2 - 2$, $y = 3e^{2t}$, $t \in (-\infty, 0)$

29. $x = 2\cos\theta$, $y = \theta$, $0 < \theta < \pi$ **30**. $x = e^{2s}$, $y = e^s + e^{-s}$, $s \in R$

Respuestas: **25**) la curva es una recta **26**) cóncava hacia abajo para $t \in \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ y cóncava hacia arriba para $t \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{2}\right)$
27) cóncava hacia abajo para $\theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ **28**) siempre es cóncava hacia abajo **29**) cóncava hacia arriba para $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y cóncava hacia abajo para $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ **30**) siempre es cóncava hacia arriba para $s \in \left(-\infty, \frac{\ln 3}{2}\right)$ y cóncava hacia abajo para $s \in \left(\frac{\ln 3}{2}, +\infty\right)$

En los problemas del 31 al 34 halle la longitud del arco dado.

31. $x = 3\cos\theta$, $y = 3\operatorname{sen}\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$ **32**. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 4$

33. $x = \frac{1}{2}t^2$, $y = \frac{1}{9}(6t + 9)^{\frac{3}{2}}$, $0 \le t \le 4$ **34**. $x = t$, $y = \sqrt{36 - t^2}$, $0 \le t \le 3$

Respuestas: **31**) 6π **32**) $\sqrt{2}\left(e^4 - 1\right)$ **33**) 20 **34**) π

En los problemas del 35 al 38 halle el área de la región comprendida entre el arco dado y el eje *x*.

35. $x = 3t^2$, $y = 2t^3$, $0 \le t \le 1$ **36**. $x = e^{2t}$, $y = e^{-t}$, $0 \le t \le \ln 4$

37. $x = 3\operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

38. $x = t$, $y = \sqrt{4 - t^2}$, $0 \le t \le 2$

Respuestas: **35**) $\frac{12}{5}$ **36**) 6 **37**) $\frac{3\pi}{4}$ **38**) π

En los problemas del 39 al 42 halle los puntos de la curva donde la recta tangente es horizontal, y los puntos donde es vertical.

39. $y = 2\operatorname{sen} t$, $x = 2\cos t$, $0 \le t \le 2\pi$

40. $y = 2\operatorname{sen}^3 t$, $x = 2\cos^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$

41. $y = t^2 - 1$, $x = t^3 - t$

42. $x = t + \frac{1}{t}$, $y = t + 1$, $0 < t$

Respuestas: **39**) horizontal: $P_1(0,\ 2)$, $P_2(0, -2)$; vertical: $P_3(2,\ 0)$, $P_4(-2,\ 0)$ **40**) horizontal: no hay puntos; vertical: $P_1(0,\ 2)$, $P_2(0, -2)$, $P_3(2,\ 0)$, $P_4(-2,\ 0)$ **41**) vertical: $P_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{9}, -\frac{2}{3}\right)$, $P_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}, -\frac{2}{3}\right)$; horizontal: $P_3(0,\ -1)$

42) horizontal: no hay puntos ; vertical: $P(2,\ 2)$

En los problemas del 43 al 48 halle una ecuación paramétrica de las ecuaciones cartesianas dadas.

43. $2x + 3y - 11 = 0$

44. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$

45. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$

46. $\frac{(x - 4)^2}{25} + \frac{(y + 3)^2}{49} = 1$

47. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{9} = 1$

48. $-\frac{(x + 1)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1$

Respuestas: 43) $x = t$, $y = \frac{11 - 2t}{3}$ **44**) $x = 3 + 4\cos\theta$, $y = 2 + 4\operatorname{sen}\theta$ **45**) $x = 5\cos\theta$, $y = 7\operatorname{sen}\theta$

46) $x = 4 + 5\cos\theta$, $y = -3 + 7\operatorname{sen}\theta$ **47**) $x = 2\sqrt{3}\cosh\theta$, $y = 3\operatorname{senh}\theta$ **48**) $y = 2 + 4\cosh\theta$, $x = -1 + 3\operatorname{senh}\theta$

En los problemas 49 al 52 parametrice la curva *C*.

49. C es la curva de intersección del cilindro de ecuación $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$ con el plano de ecuación $z = 4$.

50. C es la curva de intersección del cilindro de ecuación $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ con el plano de ecuación $z = 3y$.

51. C es la curva de intersección del cilindro de ecuación $x^2 + z^2 = 16$ con el plano de ecuación $x = y$.

52. C es la curva de intersección de la superficie cilíndrica de ecuación $\frac{(y - 2)^2}{9} + z^2 = 1$ con el plano de ecuación $x = 2z$.

Respuestas: 49) $x = 3 + 3\cos\theta$, $y = -1 + 3\operatorname{sen}\theta$, $z = 4$ **50**) $x = -2 + 2\cos\theta$, $y = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$, $z = 3 + 6\operatorname{sen}\theta$

51) $x = 4\cos\theta$, $z = 4\operatorname{sen}\theta$, $y = 4\cos\theta$ **52**) $y = 2 + 3\cos\theta$, $z = \operatorname{sen}\theta$, $x = 2\operatorname{sen}\theta$

FUNCIONES VECTORIALES Y CURVAS EN EL ESPACIO

Definiciones, propiedades y teoremas importantes

Definición 2.1: Una función vectorial $\vec{r}$ de variable real sobre un dominio $D \subseteq R$ es una regla que a todo número real *t* contenido en *D* le asigna un único vector del espacio denotado por $\vec{r}(t)$. Si $\vec{r}(t)$ es un vector de R^3, y $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son las componentes del vector $\vec{r}(t)$, entonces *f*, *g* y *h* son funciones reales de variable real llamadas funciones componentes de $\vec{r}$ y se escribe

$$\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

El dominio de la función $\vec{r}$ es la intersección de los dominios de las funciones *f*, *g* y *h*.

Teorema 2.1: Si $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ entonces

$$\lim_{t \to a} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \to a} f(t), \lim_{t \to a} g(t), \lim_{t \to a} h(t) \right) = \left(\lim_{t \to a} f(t) \right)\vec{i} + \left(\lim_{t \to a} g(t) \right)\vec{j} + \left(\lim_{t \to a} h(t) \right)\vec{k}$$

siempre que existan los límites de sus funciones componentes.

Teorema 2.2: Una función vectorial $\vec{r}$ es continua en *a* si y sólo si las funciones componentes *f*, *g* y *h* son continuas en *a*.

Definición 2.2: Dada una función vectorial $\vec{r}$ definida $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$. Si las funciones componentes *f*, *g* y *h* son continuas en un intervalo I. Entonces el conjunto *C* de los puntos del espacio, (x, y, z) , donde $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$ con *t* variando en I, se llama curva en el espacio. Las ecuaciones

$$x = f(t),\ y = g(t) \text{ y } z = h(t)$$

representan una parametrización de la curva, a *t* se le llama parámetro.

Definición 2.3: La derivada $\vec{r}\,'$ de una función vectorial $\vec{r}$ es la función vectorial definida por

$$\vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{h \to a} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

si el límite existe.

Teorema 2.3: Si $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ y las funciones componentes *f*, *g* y *h* son derivables entonces

$$\vec{r}\,'(t)=\left(f'(t), g'(t), h'(t)\right)= f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}$$

El vector $\vec{r}\,'(t)$ se llama vector tangente a la curva *C* definida por $\vec{r}$ en el punto P siempre que $\vec{r}\,'(t)$ exista y $\vec{r}\,'(t)\neq\vec{0}$.

Definición 2.4: El vector $T(t)=\dfrac{\vec{r}\,'(t)}{\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|}$ se denomina vector tangente unitario.

Teorema 2.4: Sean $\vec{u}$ y $\vec{w}$ dos funciones vectoriales derivables en un dominio $D\subseteq R$, sea α un escalar y sea *f* una función real de una variable derivable. Entonces

- $\dfrac{d}{dt}\left[\vec{u}(t)+\vec{w}(t)\right]=\vec{u}\,'(t)+\vec{w}\,'(t)$
- $\dfrac{d}{dt}\left[\alpha\,\vec{u}(t)\right]=\alpha\,\vec{u}\,'(t)$
- $\dfrac{d}{dt}\left[f(t)\vec{u}(t)\right]= f'(t)\vec{u}(t)+ f(t)\vec{u}\,'(t)$
- $\dfrac{d}{dt}\left[\vec{u}(t)\cdot\vec{w}(t)\right]=\vec{u}\,'(t)\cdot\vec{w}(t)+\vec{u}(t)\cdot\vec{w}\,'(t)$
- $\dfrac{d}{dt}\left[\vec{u}(t)\times\vec{w}(t)\right]=\vec{u}\,'(t)\times\vec{w}(t)+\vec{u}(t)\times\vec{w}\,'(t)$
- $\dfrac{d}{dt}\left[\vec{u}\left(f(t)\right)\right]=\vec{u}\,'\left(f(t)\right)f'(t)$

Definición 2.5: Si $\vec{r}(t)=\left(f(t), g(t), h(t)\right)= f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$ entonces

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt=\left(\int_a^b f(t)\,dt, \int_a^b g(t)\,dt, \int_a^b h(t)\,dt\right)=\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\vec{i}+\left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\vec{j}+\left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\vec{k}$$

Teorema 2.5: Sea una curva *C* una curva dada por $\vec{r}(t)=\left(f(t), g(t), h(t)\right)= f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$, la cual es recorrida una sola vez cuando *t* varía de *a* a *b*. Entonces la longitud L de arco es

$$L=\int_a^b \sqrt{\left[f'(t)\right]^2+\left[g'(t)\right]^2+\left[h'(t)\right]^2}\,dt=\int_a^b\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|dt$$

Definición 2.6: Sea una curva *C* suave una curva descrita por

$$\vec{r}(t)=\left(f(t), g(t), h(t)\right)= f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k} \text{ con } a\le t\le b$$

y al menos una de las funciones *f*, *g* o *h* es uno a uno sobre (a,b). Se define la función longitud de arco s como

$$s(t) = \int_{a}^{t} \left\| \vec{r}\,'(u) \right\| du$$

Luego, $s(t)$ es la longitud de la parte de C entre $\vec{r}(a)$ y $\vec{r}(t)$.

Teorema 2.6: La variación de la longitud de arco es igual a la magnitud de $\vec{r}\,'(t)$, es decir,

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \vec{r}\,'(t) \right\|$$

Definición 2.7: Dado $\vec{T}(t)$ el vector tangente unitario a una curva *C*, la curvatura *k* de la curva se define como $k = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\|$.

Teorema 2.7: La curvatura de la curva descrita por $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ es

$$k(t) = \frac{\left\| \vec{T}\,'(t) \right\|}{\left\| \vec{r}\,'(t) \right\|} = \frac{\left\| \vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \right\|}{\left\| \vec{r}\,'(t) \right\|^3}$$

Definición 2.8: Sea *C* curva descrita por $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ el vector normal unitario $\vec{N}(t)$ es $N(t) = \frac{\vec{T}\,'(t)}{\left\| \vec{T}\,'(t) \right\|}$.

Definición 2.9: Si $\vec{T}(t)$ y $\vec{N}(t)$ son los vectores tangente unitario y normal unitario a una curva *C*. El vector $\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$, se llama vector binormal y es perpendicular a los vectores $\vec{T}(t)$ y $\vec{N}(t)$.

Definición 2.10: El plano determinado por los vectores normal y binormal en un punto *P* sobre una curva *C* se llama plano normal de *C* en *P*.

Definición 2.11: El plano determinado por los vectores tangente unitario y normal en un punto *P* sobre una curva *C* se llama plano osculador de *C* en *P*.

Problemas resueltos

1. Sea *C* la curva descrita por $\vec{r}(t)=\left(\sqrt{t-1}, e^{2t}, \sqrt{\ln t}\right)$

a) Determine el domino de $\vec{r}$.

b) Determine. $\lim\limits_{t\to 1^+} \vec{r}(t)$.

c) ¿Para cuáles valores de *t* es la función vectorial $\vec{r}$ continua?

d) Halle $\vec{r}\,'(t)$.

Solución:

a) Las funciones componentes definidas por $f(t)=\sqrt{t-1}$ y $h(t)=\sqrt{\ln t}$ son las que nos restringen a la variable *t*. El dominio para cada una de ellas es:

$$\mathrm{Dom}_f = \{t \in \mathrm{R} /\ t \geq 1\} \text{ Y } \mathrm{Dom}_h = \{t \in \mathrm{R} /\ t \geq 1\}.$$

Por tanto:

$$\mathrm{Dom}_{\vec{r}} = \{t \in \mathrm{R} /\ \mathrm{t} \geq 1\}$$

b) $\lim\limits_{t\to 1^+} \vec{r}(t) = \left(0, e^2, 0\right)$

c) Las tres funciones componentes son continuas en su dominio, por tanto la función $\vec{r}$ es continua en su dominio.

d) $\vec{r}\,'(t)=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{t\text{ -}1}}, 2e^{2t}, \dfrac{1}{2t\sqrt{\ln t}}\right)$

2. Sea C la curva descrita por $\vec{r}(t)=(2, \cos 2t,\ \mathrm{sen}\, 2t)$, determine la longitud L de arco de *C* para $0 \leq t \leq \pi$.

Solución:

$$\mathrm{L}=\int_0^\pi \sqrt{(-2\mathrm{sen}\, 2t)^2+(2\cos 2t)^2}\,dt = \int_0^\pi \sqrt{4}dt = 2t\ \Big|_0^\pi = 2\pi$$

3. Sea *C* la curva descrita por $\vec{r}(t)=2t\,\vec{i}+\left(8-t^2\right)\vec{j},\quad -2 \leq t \leq 2$.

a) Grafique la curva *C* e indique su orientación.

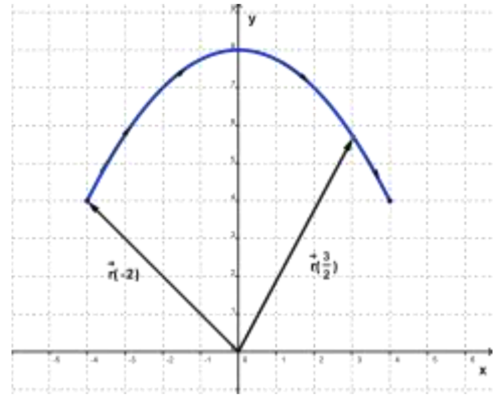
b) Grafique, en el mismo gráfico de la parte a), los vectores $\vec{r}(-2)$ y $\vec{r}\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

Solución:

De la ecuación dada se obtiene que unas ecuaciones paramétricas de la curva *C* son

$$x = 2t \quad \text{y} \quad y = 8 - t^2$$

Si despeja *t* de la ecuación $x = 2t$ y el valor obtenido se sustituye en la ecuación $y = 8 - t^2$, se obtiene la ecuación $y = 8 - \dfrac{x^2}{4}$, cuya gráfica se muestra en la figura.



4. Demuestre que la curva *C* descrita por $\vec{r}(t) = t\cos t\,\vec{i} + 2t\,\mathrm{sen}\,t\,\vec{j} + 2t\vec{k}, \quad t \geq 0$ está contenida en el cono de ecuación $z = \sqrt{4x^2 + y^2}$. Realice un bosquejo de la curva *C* e indique la orientación de la misma a medida que *t* crece.

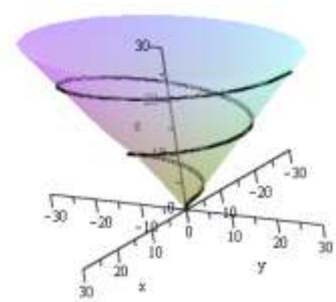
Solución:

Unas ecuaciones paramétricas de la curva *C* son: $x = t\cos t$, $y = 2t\,\mathrm{sen}\,t$, $z = 2t$, con $t \geq 0$.

Luego, al sustituir los valores de *x* y *y* en $\sqrt{4x^2 + y^2}$ resulta,

$$\sqrt{4x^2 + y^2} = \sqrt{4t^2\cos^2 t + 4t^2\mathrm{sen}^2 t} = \sqrt{4t^2} = 2|t| = 2t = z$$

Es decir, los valores de *x*, *y* y *z* satisfacen la ecuación del cono, y en consecuencia la curva *C* está contenida en el cono, como se muestra en la figura

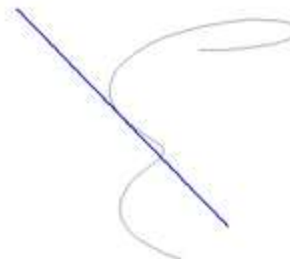


5. Sea *C* la curva descrita por $\vec{r}(t) = \langle t\,\mathrm{sen}\,t, t\cos t, t\rangle$, determine una ecuación paramétrica de la recta tangente a la curva *C* en el punto $P\left(\dfrac{\pi}{2}, 0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Solución:

$\vec{r}\,'(t) = (\mathrm{sen}\,t + t\cos t, \cos t - t\,\mathrm{sen}\,t, 1)$ de manera que el vector tangente en el punto dado es $\vec{r}\,'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \left(1, -\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ y una ecuación de la recta tangente es:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + t \\ y = -\dfrac{\pi}{2} t \\ z = \dfrac{\pi}{2} + t \end{cases}$$ $t \in \mathrm{R}$, cuya gráfica se muestra en la figura.



6. Dado el vector de posición $\vec{r}(t) = \left(\operatorname{sen}(4t), \cos(4t), 2t^{\frac{3}{2}} \right)$, de una partícula en el tiempo *t*.

a) Halle el vector velocidad y el vector aceleración.
b) Halle la rapidez de la partícula.
c) Halle la ecuación de la recta tangente para $t = 1$.

Solución:

a) $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \left(4\cos(4t), -4\operatorname{sen}(4t), 3t^{\frac{1}{2}} \right)$ y $\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) = \left(-16\operatorname{sen}(4t), -16\cos(4t), \dfrac{3}{2\sqrt{t}} \right)$

b) $\left\| \vec{v}(t) \right\| = \sqrt{16\cos^2(4t) + 16\operatorname{sen}^2(4t) + 9t} = \sqrt{16 + 9t}$

c) $\vec{r}(1) = (\operatorname{sen}4, \cos 4, 2)$. Como el vector velocidad en $\vec{v}(1) = (4\cos 4, -4\operatorname{sen}4, 3)$ es tangente a la curva descrita por $\vec{r}(t)$ en el punto $(\operatorname{sen}4, \cos 4, 2)$, las ecuaciones paramétricas de la recta tangente son:

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen}4 + (4\cos 4)t \\ y = \cos 4 - (4\operatorname{sen}4)t \quad t \in \mathrm{R} \\ \mathrm{z} = 2 + 3\mathrm{t} \end{cases}$$

7. Halle la función $\vec{r}$ tal que $\vec{r}\,'(t) = (t, e^t, t^2)$ y $\vec{r}(0) = (0, -5, 1)$.

Solución:

$$\vec{r}\,'(t) = (t, e^t, t^2) \Rightarrow \vec{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2} + C_1, e^t + C_2, \frac{t^3}{3} + C_3 \right) \Rightarrow \vec{r}(0) = (C_1, 1 + C_2, C_3)$$

Como $\vec{r}(0) = (0, -5, 1)$ se debe cumplir que

$$(C_1, 1 + C_2, C_3) = (0, -5, 1)$$

En consecuencia $C_1 = 0, \quad C_2 = -6 \quad \text{y} \quad C_3 = 1$.

Por lo tanto,

$$\vec{r}(t)=\left(\frac{t^2}{2},-6+e^t,1+\frac{t^3}{3}\right)$$

8. Pruebe que si $\vec{r}(t)$ es el vector de posición de una curva *C* en R^3 con aceleración nula entonces *C* es una recta o un punto.

Solución:

Sea $\vec{r}(t)=\left(f(t),g(t),h(t)\right)$ entonces $\vec{a}(t)=\vec{r}''(t)=\left(f''(t),g''(t),h''(t)\right)$.

Si $\vec{a}(t)=\vec{0}$ se debe cumplir que $f''(t)=0,\quad g''(t)=0 \quad \text{y} \quad h''(t)=0$. Integrando se obtiene:

$$f'(t)=C_1,\quad g'(t)=C_2 \quad \text{y} \quad h'(t)=C_3$$

Al integrar nuevamente, resulta:

$$f(t)=C_1t+D_1,\quad g(t)=C_2t+D_2 \quad \text{y} \quad h(t)=C_3t+D_3$$

Si C_1, C_2 y C_3 no son todos nulos

$$\vec{r}(t)=\left(C_1t+D_1,C_2t+D_2,C_3t+D_3\right)$$

Es la ecuación vectorial de una recta.

Si C_1, C_2 y C_3 son todos nulos

$$\vec{r}(t)=\left(D_1,D_2,D_3\right)$$

Es un punto.

9. Dada la curva C con ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x=\operatorname{sen}(2t) \\ y=\dfrac{t}{\pi} \\ z=\cos(2t) \end{cases} \qquad t>0$

a) Halle los vectores tangente unitario $\vec{T}(t)$, normal unitario $\vec{N}(t)$ y binormal $\vec{B}(t)$ en el punto $P\left(1,\frac{1}{4},0\right)$.

b) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva *C* en el punto *P*.

c) Determine las ecuaciones del plano normal y del plano osculador en el punto *P*.

d) Halle el ángulo que forma el vector tangente unitario en *P* con el semieje positivo de *z*.

Solución:

a) Primero se determina el valor del parámetro *t* para el cual se obtiene el punto $P\left(1, \frac{1}{4}, 0\right)$.

$$\text{sen}\,(2t) = 1, \quad \frac{1}{4} = \frac{t}{\pi} \quad y \quad \cos(2t) = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

Observe que *C* puede ser descrita por la función vectorial $\vec{r}(t) = \left(sen(2t), \frac{t}{\pi}, \cos(2t) \right)$.

El vector tangente $\vec{r}\,'(t)$ es:

$$\vec{r}\,'(t) = \left(2\cos(2t), \frac{1}{\pi}, -2\text{sen}\,(2t) \right)$$

Y su magnitud viene dada por:

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{4\cos^2(2t) + \frac{1}{\pi^2} + 4\text{sen}^2(2t)} = \sqrt{4 + \frac{1}{\pi^2}}$$

Por lo tanto, el vector tangente unitario $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|}$ es el vector

$$\boxed{\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{\pi^2}}} \left(2\cos(2t), \frac{1}{\pi}, -2\text{sen}\,(2t) \right)}$$

El vector tangente unitario en el punto $P\left(1, \frac{1}{4}, 0\right)$ es el vector $\vec{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{\pi^2}}} \left(0, \frac{1}{\pi}, -2 \right)$.

El vector $\vec{T}\,'(t)$ viene dado por

$$\vec{T}\,'(t) = \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{\pi^2}}} \left(-4\text{sen}\,(2t), 0, -4\cos(2t) \right)$$

Y su magnitud es

$$\left|\vec{T}\,'(t)\right| = \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{\pi^2}}} \sqrt{16\text{sen}^2(2t) + 16\cos^2(2t)} = \frac{4}{\sqrt{4 + \frac{1}{\pi^2}}}$$

Luego, el vector normal unitario $\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}\,'(t)}{\left|\vec{T}\,'(t)\right|}$ es el vector

$$\boxed{\vec{N}(t) = \frac{1}{4} \left(-4\text{sen}\,(2t), 0, -4\cos(2t) \right)}$$

El vector normal unitario en el punto $P\left(1, \frac{1}{4}, 0\right)$ es $\vec{N}\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-1, 0, 0)$.

Finalmente, el vector binormal $\vec{B}(t)$ en el punto $P\left(1, \frac{1}{4}, 0\right)$ se obtiene mediante

$$\vec{B}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \vec{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \vec{N}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{\pi^2}}}\left(0, \frac{1}{\pi}, -2\right) \times (-1, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{\pi^2}}}\left(0, 2, \frac{1}{\pi}\right)$$

b) El vector director de la recta tangente en el punto $P\left(1, \frac{1}{4}, 0\right)$ tiene la dirección del vector $\vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(0, \frac{1}{\pi}, -2\right)$. Luego, la ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{4} + \lambda \\ z = -2\pi\lambda \end{cases} \quad \lambda \in R \qquad \text{ó} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{4} + \frac{t}{\pi} \\ z = -2t \end{cases} \quad t \in R$$

c) El plano normal es el plano determinado por los vectores normal y binormal, es decir, el vector director del plano tiene la dirección del vector tangente. Por lo tanto, la ecuación del plano normal en el punto $P\left(1, \frac{1}{4}, 0\right)$ es:

$$\left(x-1, y-\frac{1}{4}, z\right) \cdot (0, 1, -2\pi) = 0 \qquad \text{o} \qquad 4y - 8\pi z = 1$$

El plano osculador es el plano determinado por los vectores tangente y normal, es decir, el vector director del plano tiene la dirección del vector binormal. Por lo tanto, la ecuación del plano osculador en el punto $P\left(1, \frac{1}{4}, 0\right)$ es:

$$\left(x-1, y-\frac{1}{4}, z\right) \cdot (0, 2\pi, 1) = 0 \qquad \text{o} \qquad 2z + 4\pi y = \pi$$

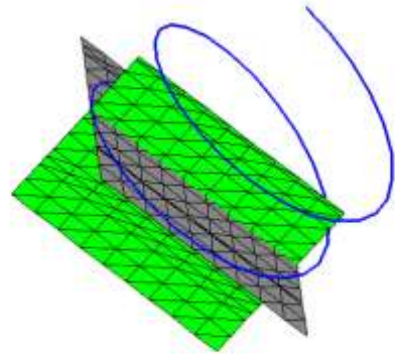
d) Puesto que

$$\vec{T} \cdot \vec{k} = \left|\vec{T}\right| \left|\vec{k}\right| \cos\theta$$

donde θ es el ángulo que forma el vector tangente unitario con el vector $\vec{k}$ el cual tiene la dirección del semieje positivo de *z*, luego, al sustituir los valores conocidos, resulta

$$\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{\pi^2}}}\left(0\,,\frac{1}{\pi}\,,-2\right)\cdot(0\,,0\,,1)=\cos\theta\Rightarrow\theta=\arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{4+\frac{1}{\pi^2}}}\right)$$

En la figura se observa la curva, el plano normal y el plano osculador.



10. Dada curva *C* descrita por $\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+\operatorname{sen} t\,\vec{j}+t\,\vec{k},\quad 0\le t\le 2\pi$ determine los puntos de la curva donde el plano normal es ortogonal al plano π de ecuación $x+z=-7$.

Solución:

El vector tangente $\vec{r}\,'(t)$ a la curva C es:

$$\vec{r}\,'(t)=(-\operatorname{sen} t\,,\cos t, 1)$$

El plano normal es el plano cuyo vector normal tiene la dirección del vector tangente.

Por otra parte, el vector normal del plano π es $\vec{n}=(1,0,1)$.

Los dos planos serán ortogonales si sus vectores normales son ortogonales, es decir, si

$$\vec{r}\,'(t)\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow(-\operatorname{sen} t\,,\cos t,1)\cdot(1,0,1)=0\Leftrightarrow-\operatorname{sen} t+1=0\Leftrightarrow\operatorname{sen} t=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$$

Para hallar el punto de la curva, debemos hallar $\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(0,1,\frac{\pi}{2}\right)$$

Por lo tanto, en el punto $Q\left(0,1,\frac{\pi}{2}\right)$ de la curva el plano normal a la curva es ortogonal al plano dado.

11. ¿En qué puntos de la curva descrita por $\vec{r}(t)=t^3\vec{i}+3t\,\vec{j}+t^4\vec{k}$ el plano normal es paralelo al plano de ecuación $3x+3y-4z=5$?

Solución:

El plano normal es el plano determinado por el vector normal y el vector binormal, es decir, el vector director del plano tiene la dirección del vector tangente.

$$\vec{r}\,'(t)=3t^2\vec{i}+3\vec{j}+4t^3\vec{k}$$

El vector normal al plano de ecuación $3x+3y-4z=5$ es $\vec{n}=3\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$.

Ambos planos son paralelos para aquellos valores de *t* para los cuales existe un número α tal que $\vec{r}\,'(t)=\alpha(3,3,-4)$, es decir, si

$$\begin{cases} 3t^2=3\alpha \\ 3=3\alpha \\ 4t^3=-4\alpha \end{cases}$$

De donde se obtiene que $\alpha=1,\quad t^2=1 \quad \text{y} \quad t^3=-1$, por lo tanto, el sistema anterior tiene como única solución $t=-1$.

En consecuencia, el punto de la curva descrita por $\vec{r}(t)=t^3\vec{i}+3t\,\vec{j}+t^4\vec{k}$ en el cual el plano normal es paralelo al plano de ecuación $3x+3y-4z=5$ es el punto $P(-1,-3,1)$.

12. Sea curva *C* descrita por $\vec{r}(t)=\left(t^2+2,\,t^2-4t,\,2t\right)$.

a) ¿Es la curvatura de *C* constante?
b) Halle la curvatura cuando $t=1$
c) Determine la curvatura en el punto $P(2,0,0)$.

Solución:

a) El vector tangente es el vector:

$$\vec{r}\,'(t)=(2t,\,2t-4,\,2)$$

Y su magnitud viene dada por:

$$\left|\vec{r}\,'(t)\right|=\sqrt{4t^2+(2t-4)^2+4}=\sqrt{8t^2-8t+20}=2\sqrt{2t^2-4t+5}$$

Y el vector $\vec{r}\,''(t)$ es el vector

$$\vec{r}\,''(t)=(2,2,0)$$

Y

$$\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)=-4\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}\Rightarrow\left|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\right|=\sqrt{16+16+64}=4\sqrt{6}$$

Al aplicar la definición $k(t)=\dfrac{\left|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\right|}{\left|\vec{r}\,'t)\right|^{3}}$. Se obtiene,

$$k(t)=\frac{\left|4\sqrt{6}\right|}{8\left(2t^{2}-4t+5\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Dado que la curvatura $k(t)$ depende del parámetro *t*, no es constante, es decir, varía en cada punto de la curva.

b) $$k(1)=\frac{4\sqrt{6}}{8(2-4+5)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

c) Para calcular la curvatura en el punto $P(2,0,0)$ se debe determinar primero el valor del parámetro *t*, para ello se debe resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} t^{2}+2=2\\ t^{2}-4t=0\\ 2t=0 \end{cases}$$

Cuya solución es $t=0$. Por lo tanto, la curvatura en el punto $P(2,0,0)$ es:

$$k(0)=\frac{\sqrt{30}}{50}$$

13. Sea *C* la curva intersección de la superficie de ecuación $4x^{2}+y^{2}-2y+1=4$ con el plano de ecuación $z=2y$.

a) Parametrice la curva *C*.

b) Determine los puntos de la curva donde la curvatura es igual a $\dfrac{1}{20}$

Solución:

a) La curva *C* puede ser parametrizada por (ejercicio 16 resuelto del capítulo 1)

$$x=\cos t,\quad y=1+2\operatorname{sen}t,\quad z=2+4\operatorname{sen}t,\ \text{con}\quad 0\le t\le 2\pi$$

Y puede ser descrita por $\vec{r}(t)=(\cos t,1+2\operatorname{sen}t,2+4\operatorname{sen}t)$.

El vector tangente es el vector:

$$\vec{r}\,'(t) = (-sen\,t\,,\,2\cos t,\,4\cos t)$$

Y su magnitud viene dada por:

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{sen^2 t + 4\cos^2 t + 16\cos^2 t} = \sqrt{sen^2 t + 20\cos^2 t} = \sqrt{1 + 19\cos^2 t}$$

Y el vector $\vec{r}\,''(t)$ es el vector

$$\vec{r}\,''(t) = (-\cos t, -2sen\,t, -4sen\,t)$$

Y

$$\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) = -4\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \left|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\right| = \sqrt{20}$$

Al aplicar la definición $k(t) = \dfrac{\left|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\right|}{\left|\vec{r}\,'t)\right|^3}$. Se obtiene,

$$k(t) = \frac{\left|\sqrt{20}\right|}{(1+19\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k(t) = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{\left|\sqrt{20}\right|}{(1+19\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{20} \Rightarrow (1+19\cos^2 t)^{\frac{3}{2}} = 20\sqrt{20} \Rightarrow$$

$$(1+19\cos^2 t)^3 = 8000 \Rightarrow 1+19\cos^2 t = 20$$

$$\Rightarrow 19\cos^2 t = 19 \Rightarrow cor^2 t = 1 \Rightarrow \cos t = 1 \quad ó \quad \cos t = -1 \Rightarrow t = 0 \quad ó \quad t = \pi$$

Los puntos de la curva donde la curvatura es igual a $\dfrac{1}{20}$ son: $P_1(1, 1, 2)$ y $P_2(-1, 1, 2)$.

14. **a**) Halle la ecuación del plano que contiene a las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones $\dfrac{x-1}{-2} = y = z+1$ y $\dfrac{x+1}{-2} = y = z-2$.

b) Dada la curva *C* descrita por $\vec{r}(t) = 3t^2\,\vec{i} + \dfrac{16}{3}t^3\,\vec{j} + (1+2t)\vec{k}$, determine los puntos de la curva donde el vector tangente es ortogonal al plano π obtenido en a).

Solución:

a) Observe que ambas rectas son paralelas con vector director $\vec{v} = (-2, 1, 1)$. Para hallar el vector normal al plano se requiere de otro vector que esté contenido en el plano, para ello tomemos un punto en cada recta. Por ejemplo $A(1, 0, -1) \in L_1$ y $B(-1, 0, 2) \in L_2$, el vector $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, 3)$ y el vector $\vec{v}=(-2,1,1)$ determinan el plano buscado. Por lo tanto, el vector $\vec{n}=\vec{v}\times\overrightarrow{AB}$ es ortogonal al plano.

$$\vec{n}=\vec{v}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 3\end{vmatrix}=3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$$

La ecuación del plano que contiene a las rectas de L_1 y L_2 es

$$(x-1,y,z+1)\cdot(3,4,2)=0$$

$$3x+4y+2z-1=0$$

b) El vector tangente $\vec{r}\,'(t)$ a la curva *C* es:

$$\vec{r}\,'(t)=\left(6t,16t^2,2\right)$$

El vector tangente es ortogonal al plano π si $\vec{r}\,'(t)$ es paralelo al vector director del plano.

Luego,

$$\vec{r}\,'(t)=\left(6t,16t^2,2\right)=\ (3,4,2)\Rightarrow t=\frac{1}{2}$$

Para hallar el punto de la curva, se debe hallar $\vec{r}\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\vec{r}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{4},\frac{2}{3},2\right)$$

Por lo tanto, en el punto $Q\left(\frac{3}{4},\frac{2}{3},2\right)$ de la curva el vector tangente es ortogonal al plano π obtenido en a).

15. La curva de ecuación $y=x^2-2x+1$ en el punto de coordenadas (x_0,y_0) tiene curvatura $k=2$, halla x_0.

Solución:

Se sabe que para el caso de una curva plana

$$k(x)=\frac{\left|y''(x)\right|}{\left[1+\left(y'(x)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$y = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow y'(x) = 2x - 2 \Rightarrow y''(x) = 2$$

Se tiene entonces que

$$k(x_0) = \frac{|2|}{\left[1 + (2x_0 - 2)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 2 \Rightarrow \left[1 + (2x_0 - 2)^2\right]^{\frac{3}{2}} = 1 \Rightarrow 1 + (2x_0 - 2)^2 = 1 \Rightarrow (2x_0 - 2)^2 = 0$$

y

$$(2x_0 - 2)^2 = 0 \Rightarrow 2x_0 - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$$

16. Suponga que una partícula sigue la trayectoria dada por $\vec{r}(t) = \left(\cos t, e^t, e^{-t}\right)$ hasta que sale por la tangente para $t = 1$, ¿dónde estará la partícula en $t = 5$?

Solución:

$$\vec{r}(1) = \left(\cos 1, e, \frac{1}{e}\right)$$

y

$$\vec{r}\,'(t) = \left(-\operatorname{sen} t, e^t, -e^{-t}\right) \Rightarrow \vec{r}\,'(1) = \left(-\operatorname{sen} 1, e, -\frac{1}{e}\right)$$

Luego, unas ecuaciones paramétricas de la recta tangente en $t = 1$ son

$$\begin{cases} x = \cos 1 - \lambda \operatorname{sen} 1 \\ y = e + e\lambda \qquad\qquad , \quad \lambda \in R \\ z = \dfrac{1}{e} - \dfrac{\lambda}{e} \end{cases}$$

Observe que cuando $\lambda = 0$ se obtiene $\vec{r}(1)$, luego para hallar la posición de la partícula en $t = 5$ se debe hacer $\lambda = 4$.

Por lo tanto, en $t = 5$ la partícula estará en el punto $\left(\cos 1 - 4\operatorname{sen} 1, 5e, -\frac{3}{e}\right)$.

17. Dada la función vectorial definida por $\vec{f}(t) = \left(t^2, \ln t, 2t\right)$

a) Determine el dominio de la función $\vec{f}$.

b) Halle la longitud de arco de la parte de la curva descrita por $\vec{f}$ desde el punto $P(1, 0, 2)$ hasta el punto $Q\left(e^2, 1, 2e\right)$.

c) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva *C* en el punto *P*.

d) Determine la curvatura de la curva descrita por $\vec{f}$ en el punto $P(1, 0, 2)$.

e) Halle la ecuación del plano osculador en el punto $P(1, 0, 2)$.

Solución:

a) $\mathrm{Dom}_{\vec{f}} = (0, +\infty)$

b) Primero hay que determinar el valor del parámetro t para el cual se obtiene el punto $P(1, 0, 2)$
.

$$t^2 = 1, \quad \ln t = 0 \quad y \quad 2t = 2 \Rightarrow t = 1$$

En forma análoga, se obtiene que para $t = e$ se obtiene el punto $Q(e^2, 1, 2e)$.

El vector tangente $\vec{f}\,'(t)$ es:

$$\vec{f}\,'(t) = \left(2t, \frac{1}{\mathrm{t}}, 2\right)$$

Se tiene entonces que:

$$L_C = \int_1^e \left\|\vec{f}\,'(t)\right\| dt = \int_1^e \left(2t + \frac{1}{t}\right) dt = e^2$$

c) El vector director de la recta tangente en el punto $P(1, 0, 2)$ tiene la dirección del vector $\vec{f}\,'(1) = (2, 1, 2)$. Luego, la ecuación de la recta tangente es:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \quad , \quad \lambda \in R \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

d) Se sabe que

$$k(t) = \frac{\left|\vec{f}\,'(t) \times \vec{f}\,''(t)\right|}{\left\|\vec{f}\,'(t)\right\|^3}$$

Y

$$\vec{f}\,'(t) = \left(2t, \frac{1}{\mathrm{t}}, 2\right) \Rightarrow \vec{f}\,''(t) = \left(2, -\frac{1}{\mathrm{t}^2}, 0\right)$$

Luego, en $t = 1$, se tiene que:

$$\vec{f}\,'(1) = (2, 1, 2)\,, \quad \vec{f}\,''(1) = (2, -1, 0)\,, \quad \left\|\vec{f}\,'(1)\right\| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$\vec{f}\,'(1) \times \vec{f}\,''(1) = (2, 1, 2) \times (2, -1, 0) = (2, 4, -4), \ \left\|\vec{f}\,'(1) \times \vec{f}\,''(1)\right\| = \sqrt{4+16+16} = 6$$

Por lo tanto

$$k(1)=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$$

e) El plano osculador es el plano determinado por el vector tangente unitario y el vector normal, es decir, el vector director del plano tiene la dirección del vector binormal.

$$\vec{f}\,'(t)=\left(2t\,,\frac{1}{\mathrm{t}}\,,2\right) \quad \Rightarrow \left\|\vec{f}\,'(t)\right\|=2t+\frac{1}{t}$$

Luego,

$$\vec{T}(t)=\frac{t}{2t^2+1}\left(2t\,,\frac{1}{\mathrm{t}}\,,2\right)$$

$$\vec{T}\,'(t)=\left(\frac{4t}{\left(2t^2+1\right)^2}\,,-\frac{4t}{\left(2t^2+1\right)^2}\,,\frac{2-4t^2}{\left(2t^2+1\right)^2}\right)=\frac{1}{\left(2t^2+1\right)^2}\left(4t\,,-4t\,,2-4t^2\right)$$

$$\left\|\vec{T}\,'(t)\right\|=\frac{1}{\left(2t^2+1\right)^2}\sqrt{16t^2+16t^2+4-16t^2+16t^4}=\frac{1}{\left(2t^2+1\right)^2}\sqrt{16t^2+4+16t^4}$$

En consecuencia,

$$\vec{N}(t)=\frac{1}{\sqrt{16t^2+4+16t^4}}\left(4t\,,-4t\,,2-4t^2\right)$$

En el punto $P(1\,,0\,,2)$ se tiene que:

$$\vec{T}(1)=\frac{1}{3}(2,1,2) \quad \text{y} \quad \vec{N}(1)=\frac{1}{6}(4,-4,-2\ \ )$$

Y

$$\vec{B}(1)=\vec{T}(1)\times\vec{N}(1)=\frac{1}{18}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & -2 \end{vmatrix}=\frac{1}{3}(1\,,2\,,-2)$$

Por lo tanto, la ecuación del plano osculador en el punto $P(1\,,0\,,2)$ es:

$$(x-1\,,y\,,z-2)\cdot(1\,,2\,,-2)=0$$

o

$$x+2y-2z=-3$$

18. Sea *C* la curva descrita por $\vec{r}(t)=\left(2+t^2\,,t\right)$.

a) ¿Es la curvatura de *C* constante?
b) Halle el punto de la curva donde la curvatura tiene su máximo valor.

c) El radio de curvatura se define como $\rho(t)=\dfrac{1}{k(t)}$. Con base al resultado obtenido en la parte a) diga si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

c.1) Si $t\to+\infty$ ó $t\to-\infty$ entonces $k(t)\to 0$.

c.2) Si $k(t)\to 0$ entonces $\rho(t)\to+\infty$

Solución:

a) El vector tangente a la curva es el vector:

$$\vec{r}\,'(t)=(2t\,,1)$$

Y su magnitud viene dada por:

$$\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|=\sqrt{4t^2+1}$$

Y el vector $\vec{r}\,''(t)$ es el vector

$$\vec{r}\,''(t)=(2\,,0)$$

Luego,

$$\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2t & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}=-2\vec{k}\Rightarrow\left|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\right|=2$$

Al aplicar la definición $k(t)=\dfrac{\left|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\right|}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|^3}$. Se obtiene,

$$k(t)=\frac{2}{\left(4t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Dado que la curvatura $k(t)$ depende del parámetro *t*, no es constante, es decir, varía en cada punto de la curva.

b) Para hallar el punto donde la curvatura es máxima debemos hallar $k'(t)$

$$k'(t)=-\frac{3\left(4t^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 8t}{\left(4t^2+1\right)^3}=-\frac{24t}{\left(4t^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Se tiene que $k'(t)=0\Leftrightarrow t=0$. Como $k'(t)>0$ para $t\in(0,+\infty)$ y $k'(t)<0$ para $t\in(-\infty,0)$, *k* es creciente en $(-\infty,0)$ y es decreciente en $(0,+\infty)$, por lo tanto la curvatura es máxima para $t=0$, es decir, en el punto $(2,0)$.

c.1) Verdadero, ya que $\lim\limits_{t\to\pm\infty} k(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{2}{\left(4t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$

c.2) Verdadero, ya que $\rho(t) = \dfrac{1}{k(t)}$ y si $k(t) \to 0$ entonces $\rho(t) \to +\infty$.

19. Una mosca camina a lo largo de un alambre en forma de hélice, la cual se encuentra dentro de un globo centrado en el origen y tiene radio 10. Su vector posición está dado por $\vec{r}(t) = \left(6\cos(\pi t), 6\operatorname{sen}(\pi t), 2t\right)$ con $t \geq 0$.

a) Justifique que la trayectoria tiene forma de hélice.
b) ¿En cuál punto la mosca chocaría con el globo esférico?
c) ¿Qué tanto viajó, desde su inicio, hasta que chocó con el globo?
d) ¿Qué puede decirse sobre su vector velocidad con respecto a la aceleración?

Solución:

a) Dado que la posición de la mosca viene dada por $\vec{r}(t) = \left(6\cos(\pi t), 6\operatorname{sen}(\pi t), 2t\right)$, se tiene que $x = 6\cos(\pi t)$, $y = 6\operatorname{sen}(\pi t)$, $z = 2t$, con $t \geq 0$.

Como

$$x^2 + y^2 = 36\cos^2(\pi t) + 36\operatorname{sen}^2(\pi t) = 36$$

La trayectoria tiene forma de hélice.

b) La ecuación de un globo esférico centrado en el origen y de radio 10 es $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, reemplazando las coordenadas de la trayectoria de la mosca en la ecuación del globo se tiene:

$$36 + (2t)^2 = 100 \Rightarrow 4t^2 = 64 \Rightarrow t = 4$$

El punto en el cual la mosca choca con el globo es la imagen de 4, es decir,

$$\vec{r}(4) = \left(6\cos(4\pi), 6\operatorname{sen}(4\pi), 8\right) = (6,0,8)$$

c) la distancia recorrida es la longitud de arco:

$$\mathrm{L} = \int_0^4 \left\|\vec{r}\,'(t)\right\| dt = \int_0^4 \sqrt{(-6\pi\operatorname{sen} t)^2 + \left(6\pi\cos^2 t\right)^2 + 4}\,dt = \int_0^4 \sqrt{4 + 36\pi^2}\; dt \; = 8\sqrt{9\pi^2 + 1}$$

d) Observe que

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \left(-6\pi sen(\pi t), 6\pi cos(\pi t), t\right) \quad \text{y} \quad \vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) = \left(-6\pi^2\cos(\pi t), -6\pi^2 sen(\pi t), 0\right)$$

Luego,

$$\vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t)=36\pi^3\cos(\pi t)sen(\pi t)-36\pi^3\cos(\pi t)sen(\pi t)=0$$

En consecuencia el vector velocidad y el vector aceleración son ortogonales.

20. Considere la curva *C* descrita por:

$$\vec{r}(t)=\left(e^t\,,\,2\sqrt{2}\,e^{\frac{t}{2}}\,,\,t\right)$$

a) Encuentre la ecuación del plano normal a la curva C en el punto $P\left(1,\,2\sqrt{2}\,,\,0\right)$.

b) Halle el valor o los valores, si existen, de la constante *k* para que la recta *L* que tiene como vector director al vector $\overrightarrow{V_L}(t)=\left(k^3-k^2,\sqrt{2}k,-k+3k^2\right)$ sea paralelo al plano normal obtenido en el apartado a)

c) ¿Existe algún valor *t* en los reales que cumpla $\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|=9$?

Solución:

a) $$\vec{r}\,'(t)=\left(e^t\,,\,\sqrt{2}\,e^{\frac{t}{2}}\,,1\right)\Rightarrow\vec{r}\,'(P)=\left(1,\,\sqrt{2}\,,1\right)$$

La ecuación del plano normal en el punto $P\left(1,\,2\sqrt{2}\,,\,0\right)$ es:

$$\left(x-1,y-2\sqrt{2},z\right)\left(1,\sqrt{2},1\right)=0 \quad \text{ó} \qquad x+\sqrt{2}y+z=5$$

b) El vector director de la recta es paralelo al plano si y sólo si el vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano, luego

$$\left(k^3-k^2,\sqrt{2}k,-k+3k^2\right)\left(1,\,\sqrt{2}\,,1\right)=0\Rightarrow k^3-k^2+2k-k+3k^2=0\ \Rightarrow k^3+2k^2+k=0$$
$$\Rightarrow k\left(k^2+2k+1\right)=0\Rightarrow k\left(k+1\right)^2=0\Rightarrow k=-1 \text{ ya que } k\neq 0$$

c) $$\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|=\sqrt{e^{2t}+2e^t+1}=\sqrt{\left(e^t+1\right)^2}=\left|e^t+1\right|=e^t+1$$

$$\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|=9\Leftrightarrow e^t+1\Rightarrow e^t=8\Rightarrow t=\ln 8=3\ln 2$$

Problemas propuestos

En los problemas del 1 al 4, halle una función vectorial que describa la curva cuyas ecuaciones paramétricas se dan.

1. $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t$ **2.** $x = 2t^2, \quad y = 3t^3, \quad z = t$

3. $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = e^{2t}$ **4.** $x = 3\cos^2 t, \quad y = 3\operatorname{sen}^2 t, \quad z = -t$

Respuestas: **1)** $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}$ **2)** $\vec{r}(t) = 2t^2\,\vec{i} + 3t^3\,\vec{j} + t\vec{k}$ **3)** $\vec{r}(t) = e^t\,\vec{i} + e^{-t}\,\vec{j} + e^{2t}\,\vec{k}$ **4)** $\vec{r}(t) = 3\cos^2 t\,\vec{i} + 3\operatorname{sen}^2 t\,\vec{j} - t\vec{k}$

En los problemas del 5 al 8, halle una función vectorial que describa la curva dada en ecuaciones cartesianas.

5. $x = 3 - y$ **6.** $y = 2 - x^2$ **7.** $x^2 + y^2 = 9$ **8.** $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$

Respuestas: **5)** $\vec{r}(t) = (3-t)\vec{i} + t\,\vec{j}$ **6)** $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + (2-t^2)\vec{j}$ **7)** $\vec{r}(t) = 3\cos t\,\vec{i} + 3\operatorname{sen} t\,\vec{j}$ **8)** $\vec{r}(t) = (2+5\cos t)\vec{i} + (-1+5\operatorname{sen} t)\vec{j}$

En los problemas del 9 al 12 determine el dominio de la función vectorial dada

9. $\vec{r}(t) = \sqrt{4-t^2}\,\vec{i} + \ln(t+1)\vec{j}$ **10.** $\vec{r}(t) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}\vec{i} + \dfrac{1}{1-e^t}\vec{j} + \sqrt{\dfrac{16}{t} - t}\,\vec{k}$

11. $\vec{r}(t) = \left(\ln(9-t^2), \dfrac{1}{1-\ln t}, \dfrac{2}{t^2-2t-3}\right)$ **12.** $\vec{r}(t) = \left(\arccos t, e^t, \dfrac{5}{2t-1}\right)$

Respuestas: **9)** $Dom_r = (-1, 2)$ **10)** $Dom_r = [-4, 4] - \{-1, 0, 1\}$ **11)** $Dom_r = (0,3) - \{e\}$ **12)** $Dom_r = [-1,1] - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

En los problemas del 13 al 16, evalúe el límite, si existe.

13. $\lim\limits_{t\to 3}\left(e^t\,\vec{i} + \dfrac{t^2-9}{t-3}\vec{j} + \dfrac{1}{t}\vec{k}\right)$ **14.** $\lim\limits_{t\to 0}\left(\operatorname{sen} t\,\vec{i} + \dfrac{1-\cos t}{t}\vec{j} + 4\vec{k}\right)$

15. $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(e^{-t}\,\vec{i} + \dfrac{t^2+t-3}{2t^2-1}\vec{j} + \dfrac{t}{t^2}\vec{k}\right)$ **16.** $\lim\limits_{t\to 1}\left(\dfrac{\ln t}{t^2-1}\vec{i} + \sqrt{t}\,\vec{j} + \dfrac{t^3-1}{t-1}\vec{k}\right)$

Respuestas: **13)** $\left(e^3, 6, \frac{1}{3}\right)$ **14)** $(0, 0, 4)$ **15)** $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ **16)** $\left(\frac{1}{2}, 1, 3\right)$

En los problemas del 17 al 20, determine los intervalos en los que la función vectorial es continua.

17. $\vec{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + e^t\,\vec{k}$ **18.** $\vec{r}(t) = \sqrt{t}\,\vec{i} + 4t\,\vec{j} - 4\ln t\vec{k}$

19. $\vec{r}(t) = \sqrt{t-2}\,\vec{i} + \dfrac{1}{t}\vec{j} + 4t^2\vec{k}$ **20.** $\vec{r}(t) = \arccos 2t\,\vec{i} + 3t\,\vec{j} + \arctan t\vec{k}$

Respuestas: **17**) $(-\infty,+\infty)$ **18**) $(0,+\infty)$ **19**) $[2,+\infty)$ **20**) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

En los problemas del 21 al 24, encuentre los valores de $\vec{r}\,'(t)$ y $\vec{r}\,''(t)$ para los valores de *t* dados.

21. $\vec{r}(t)=\operatorname{sen}t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+e^{t}\vec{k}$, $t=0$

22. $\vec{r}(t)=\sqrt{t}\,\vec{i}+3t^{3}\vec{j}-4\ln t\vec{k}$, $t=1$

23. $\vec{r}(t)=3\cos t\,\vec{i}+3\operatorname{sen}t\,\vec{j}-4t\vec{k}$, $t=\dfrac{\pi}{2}$

24. $\vec{r}(t)=e^{t}\,\vec{i}+e^{2t}\,\vec{j}+e^{3t}\vec{k}$, $t=0$

Respuestas: **21**) $\vec{r}\,'(0)=(1,0,1)$; $\vec{r}\,''(0)=(0,-1,1)$ **22**) $\vec{r}\,'(1)=\left(\frac{1}{2},9,-4\right)$; $\vec{r}\,''(1)=\left(-\frac{1}{4},18,4\right)$

23) $\vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-3,0,-4)$; $\vec{r}\,''\left(\frac{\pi}{2}\right)=(0,-3,0)$ **24**) $\vec{r}\,'(0)=(1,2,3)$; $\vec{r}\,''(0)=(1,4,9)$

En los problemas del 25 al 28, se da el vector de posición $\vec{r}(t)$ de una partícula que se mueve en el espacio encuentre los vectores $\vec{r}\,'(t)$ y $\vec{r}\,''(t)$ en el tiempo *t*.

25. $\vec{r}(t)=\vec{i}+t^{2}\vec{j}+t^{3}\vec{k}$

26. $\vec{r}(t)=4\cos t\,\vec{i}-4\operatorname{sen}t\,\vec{j}+9t\vec{k}$

27. $\vec{r}(t)=\left(4t+t^{3}\right)\vec{i}+7t^{2}\vec{j}+e^{4t}\vec{k}$

28. $\vec{r}(t)=9\left(\cos 3t\,\vec{i}+\operatorname{sen}3t\,\vec{j}\right)+8\vec{k}$

Respuestas: **25**) $\vec{r}\,'(t)=2t\,\vec{j}+3t^{2}\,\vec{k}$; $\vec{r}\,''(t)=2\,\vec{j}+6t\,\vec{k}$ **26**) $\vec{r}\,'(t)=-4\operatorname{sen}t\vec{i}-4\cos t\,\vec{j}+9\vec{k}$;
$\vec{r}\,''(t)=-4\cos t\vec{i}+4\operatorname{sen}t\,\vec{j}$ **27**) $\vec{r}\,'(t)=\left(4+3t^{2}\right)\vec{i}+14t\,\vec{j}+4e^{4t}\,\vec{k}$; $\vec{r}\,''(t)=6t\vec{i}+14\,\vec{j}+16e^{t}\,\vec{k}$
28) $\vec{r}\,'(t)=27\left(-\operatorname{sen}3t\,\vec{i}+\cos 3t\,\vec{j}\right)$; $\vec{r}\,''(t)=-81\left(\cos 3t\,\vec{i}+\operatorname{sen}3t\,\vec{j}\right)$

29. Dado el vector de posición $\vec{r}(t)=\left(\sqrt{2}\,t,e^{t},e^{-t}\right)$ de una partícula en el tiempo *t*,

a) Halle el vector velocidad y el vector aceleración.

b) Halle la rapidez de la partícula.

Respuestas: **a**) $\vec{v}(t)=\left(\sqrt{2},e^{t},-e^{-t}\right)$; $\vec{a}(t)=\left(0,e^{t},e^{-t}\right)$ **b**) $e^{t}+e^{-t}$

30. Las ecuaciones paramétricas de un punto en movimiento son $x=4\cos 2t$, $y=4\operatorname{sen}2t$, $z=6t$. Encuentre el vector velocidad, la rapidez y el vector aceleración en el tiempo $t=\dfrac{\pi}{8}$.

Respuesta: $\vec{v}\left(\frac{\pi}{8}\right)=-4\sqrt{2}\,\vec{i}+4\sqrt{2}\,\vec{j}+6\vec{k}$; $\left|\vec{v}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right|=10$; $\vec{a}\left(\frac{\pi}{8}\right)=-8\sqrt{2}\,\vec{i}-8\sqrt{2}\,\vec{j}$

En los problemas del 31 al 34, halle las integrales indefinidas.

31. $\int\left(2t^{3}\vec{i}+\frac{1}{t}\vec{j}+3\sqrt{t}\,\vec{k}\right)dt$

32. $\int\left(\cos t\,\vec{i}+\operatorname{sen}t\,\vec{j}+e^{t}\,\vec{k}\right)dt$

33. $\int\left((2-t)\vec{i}+e^{2t}\,\vec{j}+-\dfrac{1}{1+t^2}\,\vec{k}\right)dt$ **34.** $\int\left(\sec^2 t\,\vec{i}+\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\vec{j}+e^{\frac{t}{2}}\,\vec{k}\right)dt$

Respuestas: **31)** $\left(\frac{1}{2}t^4+C_1\right)\vec{i}+(\ln t+C_2)\,\vec{j}+\left(2t^{\frac{3}{2}}+C_3\right)\vec{k}$ **32)** $(\operatorname{sen} t+C_1)\vec{i}+(-\cos t+C_2)\,\vec{j}+\left(e^t+C_3\right)\vec{k}$

33) $\left(2t-\frac{t^2}{2}+C_1\right)\vec{i}+\left(\frac{e^{2t}}{2}+C_2\right)\vec{j}+(-\arctan t+C_3)\vec{k}$ **34)** $(\tan t+C_1)\vec{i}+(\operatorname{arcsen} t+C_2)\,\vec{j}+\left(2e^{\frac{t}{2}}+C_3\right)\vec{k}$

En los problemas del 35 al 38, determine la longitud del arco de curva descrita por la función vectorial $\vec{r}$ en el intervalo dado.

35. $\vec{r}(t)=2\cos t\,\vec{i}+2sen\,t\,\vec{j}+t\,\vec{k}\,,\ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ **36.** $\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+\dfrac{3t^2}{2}\,\vec{j}+\dfrac{3t^3}{2}\,\vec{k}\,,\ 0\le t\le 2$

37. $\vec{r}(t)=\operatorname{sen} 4t\,\vec{i}+\cos 4t\,\vec{j}+2t^{\frac{3}{2}}\,\vec{k}\,,\ 0\le t\le 1$ **38.** $\vec{r}(t)=a\cos t\,\vec{i}+a\operatorname{sen} t\,\vec{j}+bt\,\vec{k}\,,\ 0\le t\le 2\pi$

Respuestas: **35)** $\dfrac{\sqrt{5}\pi}{2}$ **36) 14** **37)** $\dfrac{122}{27}$ **38)** $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$

En los problemas del 39 y 40, determine una ecuación paramétrica de la recta tangente a la curva descrita por la función vectorial $\vec{r}$ en el punto dado.

39. $\vec{r}(t)=\left(2t^3-1,-5t+3,8t+2\right)\,,\ P(1,-2,10)$ **40.** $\vec{r}(t)=\left(4\sqrt{t}\,,t^2-10,\dfrac{4}{t}\right),\ P(8,6,1)$

Respuestas: **39)** $\begin{cases}x=1+6t\\ y=-2-5t \quad t\in\mathbb{R}\\ z=10+8t\end{cases}$ **40)** $\begin{cases}x=8+t\\ y=6+8t \quad t\in\mathbb{R}\\ z=1-\frac{1}{4}t\end{cases}$

En los problemas del 41 al 44, determine, si existen, para el valor particular de t dado, los vectores $\vec{\mathrm{T}}$, $\vec{\mathrm{N}}$ y $\vec{\mathrm{B}}$; la curvatura *k*; las ecuaciones de la recta tangente; y la ecuación del plano osculador a las curvas descritas por el vector de posición dado.

41. $\vec{r}(t)=(1+t)\vec{i}+(3-t)\vec{j}+(2t+4)\vec{k}\,,\ t=3$ **42.** $\vec{r}(t)=e^t\cos t\,\vec{i}+e^t\operatorname{sen} t\,\vec{j}+e^t\,\vec{k}\,,\ t=0$

43. $\vec{r}(t)=\left(e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}\right)\vec{i}+\left(e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}\right)\vec{j}+2t\,\vec{k}\,,\ t=0$ **44.** $\vec{r}(t)=\vec{i}+\operatorname{sen} t\,\vec{j}+\cos t\,\vec{k}\,,\ t=\dfrac{\pi}{4}$

Respuestas: **41)** $\vec{\mathrm{T}}(3)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right)$, $\vec{\mathrm{N}}(3)=\vec{0}$, $\vec{\mathrm{B}}(3)=\vec{0}$, $k(3)=0$, ecuación de la recta tangente: $x-4=-y=\dfrac{z-10}{2}$, plano osculador: no está definido.

42) $\vec{\mathrm{T}}(0)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)$, $\vec{\mathrm{N}}(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)$, $\vec{\mathrm{B}}(0)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(-\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right)$, $k(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, ecuación de la recta tangente: $x-1=y=z-1$, ecuación del plano osculador: $x+y-2z+1=0$.

43) $\vec{T}(0)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\vec{j}+2\vec{k}\right)$, $\vec{N}(0)=\vec{i}$, $\vec{B}(0)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\vec{j}-\vec{k}\right)$, $k(0)=\frac{1}{10}$, ecuación de la recta tangente: $2y=z,\quad x=2$, ecuación del plano osculador: $2y-z=0$.

44) $\vec{T}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$, $\vec{N}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$, $\vec{B}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\vec{i}$, $k\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, ecuación de la recta tangente: $x=1,\frac{2y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-2z}{\sqrt{2}}$, ecuación del plano osculador: $x=1$.

45. Una partícula P se mueve a lo largo de la curva *C* descrita por $\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+\operatorname{sen} t\,\vec{j}$, $t\geq 0$.

a) Pruebe que la trayectoria descrita por el movimiento de la partícula P es una circunferencia.

b) ¿La partícula se mueve en sentido antihorario?

c) Halle la velocidad y la aceleración.

d) ¿Son los vectores velocidad y aceleración perpendiculares?

e) ¿La partícula se mueve con una rapidez constante?

Respuesta: **b**) Si **c**) $\vec{v}(t)=-\operatorname{sen} t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}$, $\vec{a}(t)=-\cos t\,\vec{i}-\operatorname{sen} t\,\vec{j}$ **d**) Si **e**) Si

46. Demuestre que en el movimiento circular en el plano los vectores velocidad y aceleración son perpendiculares.

47. Sea *C* la curva descrita por $\vec{r}(t)=a\cos t\,\vec{i}+a\operatorname{sen} t\,\vec{j}+bt\,\vec{k}$.

a) Verifique que el ángulo θ que la recta tangente en cualquier punto de la curva forma con el eje *z* es constante.

b) Demuestre que el vector normal en cualquier punto de la curva es perpendicular al eje *z*.

c) Demuestre que el ángulo α que forma el vector binormal con el eje *z* es constante.

d) Calcule la curvatura *k*.

Respuesta: **a**) $\theta=\arccos\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ **c**) $\alpha=\arccos\left(a^2\right)$ **d**) $k(t)=\frac{|a|}{a^2+b^2}$

En los problemas 48 y 49 demuestre que la curva descrita por la función vectorial $\vec{r}$ está contenida en un plano. Determine la ecuación del plano que lo contiene.

48. $\vec{r}(t)=\frac{1+t}{1-t}\vec{i}+\frac{1}{1-t^2}\vec{j}+\frac{1}{1+t}\vec{k}$, $t\in R-\{-1,1\}$

49. $\vec{r}(t)=\left(4t+t^2\right)\vec{i}+\left(2t-t^2\right)\vec{j}+\left(t^2-4t+2\right)\vec{k}$

Respuestas : **48**) $x-4y+2z=-1$ **49**) $x+4y+3z=6$

50. Dada la curva *C* en el plano de ecuación $(2y+x)^2=-4y(2-x)-4(x+1)$.

a) Encuentre una parametrización para la curva *C*.

b) Determine para cuales valores del parámetro en el intervalo $[0,2\pi]$ la curvatura de *C* es igual a ¼.

c) Halle los puntos de la curva correspondientes a los valores del parámetro obtenidos en la parte b).

Respuestas: **a**) $y=-1+\operatorname{sen} t,\quad x=-2+2\cos t$ **b**) $t=\frac{\pi}{2}$ ó $t=\frac{3\pi}{2}$ **c**) $P_1(-2,0)$ y $P_2(-2,-2)$

51. Sea *C* la curva de intersección del cilindro de ecuación $4x^2 - 8x + 4 + 9z^2 + 18z + 9 = 1$ con el plano de ecuación $y = x$.

a) Halle una ecuación paramétrica para la curva *C*.

b) Determine los puntos de la curva donde el vector tangente es paralelo a la recta L de ecuación

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -\lambda, \quad \lambda \in R. \\ z = 0 \end{cases}$$

c) Halle la ecuación del plano normal en el punto obtenido en la parte b) que está más próximo al origen.

Respuesta: **a**) $\begin{cases} x = 1 + \dfrac{\cos t}{2} \\ y = 1 + \dfrac{\cos t}{2}, \quad 0 \le t \le 2\pi \\ z = -1 + \dfrac{sen\, t}{3} \end{cases}$ b) $A\left(1, 1, -\dfrac{2}{3}\right)$ y $A\left(1, 1, -\dfrac{4}{3}\right)$ c) $x + y = 2$

52.Considere la curva *C* dada por:

$$\vec{r}(t) = (\cos(2t), sen(2t), \ln(\cos(2t))) \text{ con } 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$$

a) Determine los puntos de la curva *C* donde la rapidez es igual a 4.

b) Determinar el valor de la curvatura y los vectores de **T** y **N** de la curva C en el punto P(1,0,0).

Respuesta: **a**) $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\ln 2\right)$ **b**) ; $k(0) = \dfrac{\sqrt{12}}{8}$ $\vec{T}(0) = \vec{j}$; $\vec{N}(0) = -\dfrac{2}{\sqrt{8}}\vec{i} - \dfrac{2}{\sqrt{8}}\vec{k}$

53. El vector de posición de una partícula es en función del tiempo es $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + \dfrac{1}{t}\vec{j} + 2\ln t\,\vec{k}$, $t > 0$

a) Halle el vector velocidad y el vector aceleración.

b) ¿Existe algún valor de t para el cual la rapidez sea máxima?

c) Determine el valor de la curvatura y de la torsión en el punto $P(2,1,0)$ de la trayectoria.

d) Calcule la longitud de la trayectoria recorrida por la partícula desde el punto $P(2,1,0)$ hasta el punto $Q\left(4, \dfrac{1}{2}, 2\ln 2\right)$.

Respuesta: **a**) $\vec{v}(t) = 2\vec{i} - \dfrac{1}{t^2}\vec{j} + \dfrac{2}{t}\vec{k}$, $\vec{a}(t) = \dfrac{2}{t^3}\vec{j} - \dfrac{2}{t^2}\vec{k}$ **b**) No **c**) $k(1) = \dfrac{2}{9}$, $\tau(1) = -\dfrac{2}{9}$ **d**) $\dfrac{5}{2}$

54. Un águila inicia su vuelo en el punto $A(2\pi, 0, 0)$ siguiendo la trayectoria dada por $\vec{r}(t) = 2\pi\cos t\,\vec{i} + 2\pi \mathrm{sen}\, t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$, hasta que choca con el plano de ecuación $y = 0$. A partir de ese momento comienza a descender a una velocidad constante $\vec{v}(t) = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ hasta que llega al suelo ubicado en el plano $z = 0$. Determine la ecuación total de la trayectoria del vuelo del águila, desde su inicio hasta que toca el suelo e indique las coordenadas del punto final.

Respuesta: $\vec{r}(t) = \begin{cases} 2\pi\cos t\vec{i} + 2\pi sen t\,\vec{j} + t\vec{k} & \text{si} \quad t \in [0, \pi] \\ (-t - \pi)\vec{i} + (2t - 2\pi)\vec{j} + (-t + 2\pi)\vec{k} & \text{si} \quad t \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$

55. El vector de posición de una partícula es en función del tiempo $\vec{r}(t)=t^2\,\vec{i}+t\,\vec{j}+t^4\,\vec{k}$, para $t\geq 0$. Determine el vector velocidad, el vector aceleración y la rapidez cuando dicha partícula choca con el plano de ecuación $x-2y+z=0$, para $t\neq 0$.

Respuesta: $\vec{v}(1)=2\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{a}(1)=2\vec{i}+12\vec{k}$, $\left\|\vec{v}(1)\right\|=\sqrt{21}$

56. Las ecuaciones paramétricas

$$x=(v_0\cos\alpha)t\,,\quad y=h_0+(v_0\operatorname{sen}\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2$$

Donde v_0 es la velocidad inicial, h_0 es la altura inicial, *g* es la aceleración de gravedad y *t* es el tiempo, modelan el movimiento de un proyectil a lo largo de una curva en el plano.

a) Pruebe que la trayectoria descrita es una parábola.

b) El proyectil es disparado con un cañón desde el suelo con una velocidad inicial de 700 $\frac{m}{s}$ y el ángulo de elevación de 30°. ¿En cuál instante el proyectil impacta contra el suelo, si se toma $g=10\frac{m}{s^2}$?

Respuesta: **b**) 70s

57. Un proyectil se dispara desde el nivel del suelo a una velocidad inicial de 75 pies por segundos con un ángulo de 30° con la horizontal. Halle el alcance el proyectil.

Respuesta: 152 pies

INTEGRALES DE LÍNEA

Definiciones, propiedades y teoremas importantes

Definición 3.1: Sea *f* una función real de dos variables continua cuyo dominio contiene una curva suave y plana *C* dada por las ecuaciones paramétricas:

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\;\;,\;\; a \le t \le b$$

La integral de línea de *f* a lo largo de *C* es:

$$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\;dt$$

Definición 3.2: Sea *f* una función real de tres variables continua cuyo dominio contiene una curva suave *C* dada por las ecuaciones paramétricas,

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\;\;,\;\; z = z(t)\,,\;\; a \le t \le b$$

La integral de línea de *f* a lo largo de *C* es,

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\;dt$$

Teorema 3.1: Sea *f* una función real de dos variables continua cuyo dominio contiene una curva suave y plana *C* dada por las ecuaciones paramétricas:

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\;\;,\;\; a \le t \le b$$

Entonces

- El valor de la integral de trayectoria no depende de la parametrización de la curva.
- Si *C* es una curva suave a trozos, es decir si *C* es la unión de un número finito de curvas suaves C_1, C_2, …, C_n, donde el punto inicial de C_{i+1} es el punto final de C_i. Entonces,
- $$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_{C_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f(x,y)\,\mathrm{d}s + \cdots + \int_{C_n} f(x,y)\,\mathrm{d}s$$
- Si $\Delta S_i = x_i - x_{i-1}$, se llama integral de *f* a lo largo de C con respecto a *x* y en este caso,
$$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x(t),y(t))\,x'(t)\,\mathrm{d}t$$
- Si $\Delta S_i = y_i - y_{i-1}$, se llama integral de *f* a lo largo de C con respecto a *y* en este caso,

$$\int_C f(x,y)\,\mathrm{dy} = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\,y'(t)\,dt$$

- $\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ denota $\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_C Q(x,y)\,\mathrm{d}y$
- Si –C denota la curva formada por los mismos puntos de C pero con orientación opuesta, entonces,

$$\int_C f(x,y)\,dx = -\int_{-C} f(x,y)dx,\ \int_C f(x,y)\,dy = -\int_{-C} f(x,y)dy \text{ y } \int_C f(x,y)\,ds = \int_{-C} f(x,y)ds$$

- Para el caso especial $f(x,y)=1$, se tiene que,

$$\int_C ds = L$$

donde *L* es la longitud de la curva.

Nota: Todas las propiedades dadas anteriormente para integrales de trayectoria en el plano se satisfacen para integrales de trayectoria en el espacio.

Definición 3.3: Un campo vectorial $\vec{\mathrm{F}}$ en un dominio del plano es una función que asigna un único vector a cada punto del dominio, puede tener la fórmula como

$$\vec{\mathrm{F}}(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{k}$$

Teorema 3.2: El campo vectorial en un dominio del plano es continuo si las funciones componentes *M* y *N* son continuas.

Definición 3.4: Sea $\vec{\mathrm{F}}$ un campo vectorial en R^2 continuo cuyo dominio contiene una curva suave *C* definida por la función vectorial $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ con $a \le t \le b$. Se define a integral de línea de $\vec{\mathrm{F}}$ a lo largo de *C* por la fórmula:

$$\int_C \vec{\mathrm{F}} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{\mathrm{F}}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \vec{r}\,'(t)\,\mathrm{d}t$$

Definición 3.5: Un campo vectorial $\vec{\mathrm{F}}$ en un dominio del espacio es una función que asigna un vector a cada punto del dominio, puede tener la fórmula como

$$\vec{\mathrm{F}}(x,y,z) = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{k} + P(x,y,z)\vec{k}$$

Teorema 3.3: El campo vectorial en un dominio del espacio es continuo si las funciones componentes *M*, *N* y *P* son continuas.

Definición 3.6: Sea $\vec{\mathrm{F}}$ un campo vectorial en R^3 continuo cuyo dominio contiene una curva suave *C* definida por la función vectorial $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, con $a \le t \le b$. Se define a integral de línea de $\vec{\mathrm{F}}$ a lo largo de *C* por la fórmula,

$$\int_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{a}^{b} \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)\cdot \vec{r}'(t)\,dt$$

Teorema 3. 4 Sea $\vec{F}$ un campo vectorial continuo cuyo dominio contiene una curva suave *C*

- El valor de la integral línea no depende de la parametrización de la curva si preserva la orientación de la curva.
- Si *C* es una curva suave a trozos, es decir si C es la unión de un número finito de curvas suaves C_1, C_2, …, C_n, donde el punto inicial C_{i+1} es el punto final de C_i, entonces,
$$\int_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \ldots + \int_{C_n} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$
- Si –C denota la curva formada por los mismos puntos de C pero con orientación opuesta, entonces:
$$\int_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{-C} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$
- Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ es un campo vectorial, entonces en notación de formas diferenciales escribimos,
$$\int_{c} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C} Pdx + Qdy + Rdz$$

Definición 3.7: Un campo vectorial $\vec{F}$ es conservativo se llama conservativo si es el gradiente de alguna función escalar.

Teorema 3.5: Sea una curva *C* una curva suave dada por $\vec{r}(t)$, con $a \le t \le b$. Sea *f* una función real diferenciable de dos o tres variables. Entonces

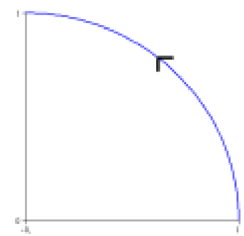
$$\int_{C} \nabla f \cdot d\vec{r} = f\left(\vec{r}(b)\right) - f\left(\vec{r}(a)\right)$$

Problemas resueltos

1. Evalúe la integral $\int_C x\ln\left(1+x^2+y^2\right)ds$, donde C es la parte de la circunferencia unitaria de centro $(0,0)$ que está en el primer cuadrante.

Solución:

Observe que la integral planteada es una integral de línea del campo escalar $f(x,y)=x\ln\left(1+x^2+y^2\right)$, definido sobre la curva C, donde C es la curva de ecuaciones paramétricas $x=\cos t$, $y=\operatorname{sen} t$, con $0\le t\le\frac{\pi}{2}$, mostrada en la figura.



La integral de f a lo largo de C se define como

$$\int_C f(x,y)\,ds=\int_C f(x(t),y(t))\left|\vec{r}\,'(t)\right|dt=\int_C f(x,y)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Con $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$.

Se tiene

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(-\operatorname{sen}(t))^2+(\cos(t))^2}=1$$

Al aplicar la definición, y al hacer las sustituciones respectivas, resulta:

$$\int_C x\ln\left(1+x^2+y^2\right)ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\ln\left(1+(\cos t)^2+(\operatorname{sen} t)^2\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\ln(2)\,dt=\ln(2)\cdot\left[\operatorname{sen} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\ln 2$$

2. Evalúe la integral $\int_C x\,e^{yz}\,ds$, donde C es el segmento de recta que une el punto $P_1(0,0,0)$ con el punto $P_2(1,2,3)$.

Solución:

Observe que la integral planteada es una integral de línea del campo escalar $f(x,y,z)=x\,e^{yz}$, y *C* es el segmento de recta de ecuaciones paramétricas $x=t$, $y=2t$, $z=3t$ con $0\le t\le 1$.

La integral de f a lo largo de *C* se define como

$$\int_C f(x,y,z)\,dS = \int_C f(x(t),y(t),z(t))\left|\vec{r}\,'(t)\right| dt = \int_C f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

Se tiene

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

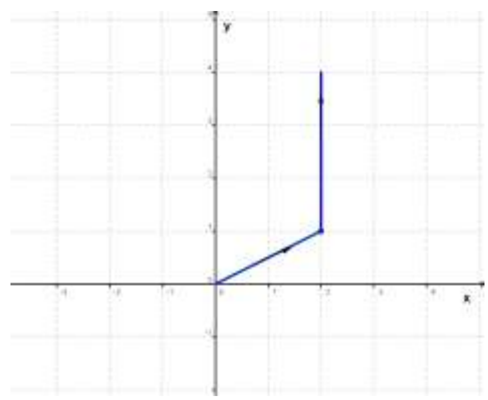
Al aplicar la definición de integral de trayectoria, y al hacer las sustituciones respectivas, resulta

$$\int_C x\,e^{yz}\,ds = \int_0^1 t\cdot e^{6t^2}\,\sqrt{14}\,dt = \sqrt{14}\left[\frac{e^{6t^2}}{12}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{14}}{12}\cdot\left[e^6-1\right]$$

3. Calcule $\int_C xy\,dx+(x-y)\,dy$, donde C está formada por los segmentos de recta de $(0,0)$ a $(2,1)$ y de $(2,1)$ a $(2,4)$.

Solución:

Observe que la integral planteada es una integral de línea del campo vectorial $\vec{F}(x,y)=xy\,\vec{i}+(x-y)\,\vec{j}$, sobre la curva *C* mostrada en la figura.



Se tiene

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

Y además, como *C* es la unión de dos curvas suaves C_1 y C_2 donde el punto inicial C_2 es el punto final de C_1, entonces,

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Luego,

$$\int_C xy\,dx+(x-y)\,dy = \int_{C_1} xy\,dx+(x-y)\,dy + \int_{C_2} xy\,dx+(x-y)\,dy +$$

a) Sea C_1 la parte de *C* que corresponde al segmento de recta de $(0,0)$ a $(2,1)$.

Unas ecuaciones paramétricas de C_1 son $x=2t$, $y=t$, con $0\le t\le 1$.

Luego,

$$dx = 2\,dt \quad \text{y} \quad dy = dt$$

Al aplicar la definición de integral de línea, al hacer las sustituciones respectivas, resulta

$$\int_{C_1} xy\,dx+(x-y)\,dy=\int_0^1 \left[4t^2+(2t-t)\right]dt=\int_0^1 \left[4t^2+t\right]dt=\left[\frac{4}{3}t^3+\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{11}{6}$$

b) Sea C_2 la parte de C que corresponde al segmento de recta que va de $(2,1)$ a $(2,4)$
Unas ecuaciones paramétricas de C_2 son $x=2$, $y=t$, con $1\le t\le 4$.
Luego,

$$dx = 0 \quad \text{y} \quad dy = dt$$

Al aplicar la definición de integral de línea de un campo vectorial y al hacer las sustituciones respectivas, resulta

$$\int_{C_2} xy\,dx+(x-y)\,dy=\int_1^4 \left[2-t\right]dt=\left[2t-\frac{t^2}{2}\right]_1^4=-\frac{3}{2}$$

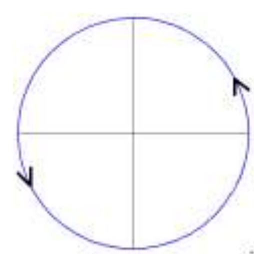
En consecuencia,

$$\int_{C} xy\,dx+(x-y)\,dy=\frac{11}{6}-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}$$

4. Evalúe la integral $\int_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, si $\vec{F}(x,y)=y^3\,\vec{i}+x^3\,\vec{j}$ y C es la circunferencia unitaria de centro $(0,0)$.

Solución:

Observe que la integral planteada es una integral de línea del campo vectorial dado por $\vec{F}(x,y)=y^3\,\vec{i}+x^3\,\vec{j}$, sobre la circunferencia unitaria mostrada en la figura.



La curva C viene descrita por

$$\vec{r}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t),\quad 0\le t\le 2\pi$$

Como

$$\int_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

Para aplicar la definición de integral de línea hay que evaluar,

$$\vec{r}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$$

$$\vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) = \left(\operatorname{sen}^3 t, \cos^3 t\right)$$

y

$$\vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) \cdot \vec{r}'(t) = \left(\operatorname{sen}^3 t, \cos^3 t\right) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t) = -\operatorname{sen}^4 t + \cos^4 t$$

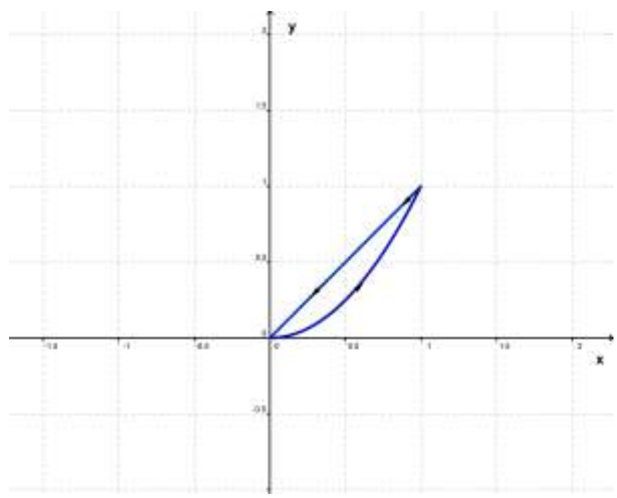
En consecuencia,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left[-\operatorname{sen}^4 t + \cos^4 t\right] dt = 0$$

5. Evalúe la integral $\int_C (x+2y)dx + (x-2y)dy$, donde C consiste del arco de parábola $y = x^2$ que va de $(0,0)$ a $(1,1)$ y del segmento de recta que va de $(1,1)$ a $(0,0)$.

Solución:

Observe que la integral planteada es una integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y) = (x+2y)\,\vec{i} + (x-2y)\,\vec{j}$, sobre la curva C mostrada en la figura.



a) Sea C_1 la parte de C que corresponde al arco parábola $y = x^2$ que va de $(0,0)$ a $(1,1)$ y calculemos la integral a lo largo de C_1,

C_1 puede ser parametrizado por las ecuaciones $x = t$, $y = t^2$, con $0 \le t \le 1$.

De donde,

$$dx = dt \quad \text{y} \quad dy = 2t\,dt.$$

Al aplicar la definición de integral de línea, y al hacer las sustituciones respectivas, se tiene que:

$$\int_{C_1} (x+2y)dx + (x-2y)dy = \int_0^1 \left[\left(t+2t^2\right) + \left(t-2t^2\right)2t\right] dt = \frac{5}{6}$$

b) Sea C_2 la parte de C que corresponde al segmento de segmento de recta que va de $(1,1)$ a $(0,0)$ y calculemos la integral a lo largo de C_2.

- C_2 puede ser parametrizado por las ecuaciones $x=t$, $y=t$, con $0\le t\le 1$.

De donde,

$$dx=dt \quad \text{y} \quad dy=dt$$

Al aplicar la definición de integral de línea de un campo vectorial, y al hacer las sustituciones respectivas, resulta:

$$\int_{C_2}(x+2y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y=-\int_0^1[t+2t+t-2t]\mathrm{d}t=-1$$

Dado que,

$$\int_{C}(x+2y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y=\int_{C_1}(x+2y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y+\int_{C_2}(x+2y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y$$

se tiene que:

$$\int_{C}(x+2y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y=\frac{5}{6}-1=-\frac{1}{6}$$

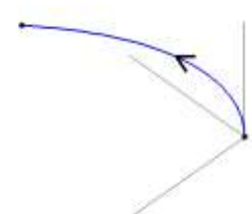
6. Evalúe la integral $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, para el campo $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z)=\operatorname{sen} x\,\vec{i}+\cos y\,\vec{j}+xz\vec{k}$ a lo largo de la curva descrita por $\vec{r}(t)=t^3\,\vec{i}-t^2\,\vec{j}+t\,\vec{k},\quad 0\le t\le 1$.

Solución:

Observe que la integral planteada es una integral de línea del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=\operatorname{sen} x\,\vec{i}+\cos y\,\vec{j}+xz\vec{k}$; sobre la curva C descrita por

$$\vec{r}(t)=\left(t^3,-t^2,t\right),\ \ 0\le t\le 1$$

Que se muestra en la figura.



Como

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)\cdot \vec{r}\,'(t)\,\mathrm{d}t$$

Se debe calcular,

$$\vec{r}\,'(t)=\left(3t^2,-2t,1\right)$$

$$\vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)=\left(\operatorname{sen}\left(t^3\right),\cos\left(-t^2\right),t^4\right)$$

y

$$\vec{\mathrm{F}}\left(\vec{r}\,(t)\right)\cdot\,\vec{r}\,'(t)=3t^2\,\mathrm{sen}\,t^3-2t\cos\left(-t^2\right)+t^4$$

Al aplicar la definición de integral de línea, se obtiene:

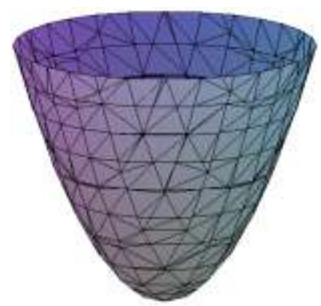
$$\int_{\mathrm{C}}\vec{\mathrm{F}}\cdot d\vec{r}=\int_0^1\left(3t^2\mathrm{sen}\left(t^3\right)-2t\cos\left(-t^2\right)+t^4\right)\mathrm{d}t=\left[-\cos\left(\mathrm{t}^3\right)+\mathrm{sen}\left(-t^2\right)+\frac{t^5}{5}\right]_0^1=-\cos(1)+\mathrm{sen}\,(-1)+\frac{6}{5}$$

$$=\frac{6}{5}-\left(\cos(1)+\mathrm{sen}\,(1)\right)$$

7. Evalúe la integral $\int_{\mathrm{C}} ydx-xdy+zdz$, si C es la curva de intersección de las superficies de ecuaciones $z=x^2+y^2$ y $x^2+y^2-2y=0$, recorrida en sentido positivo.

Solución:

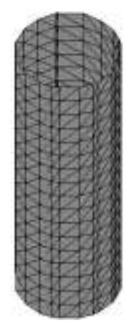
Observe que $z=x^2+y^2$ corresponde a la ecuación del paraboloide mostrado en la figura.



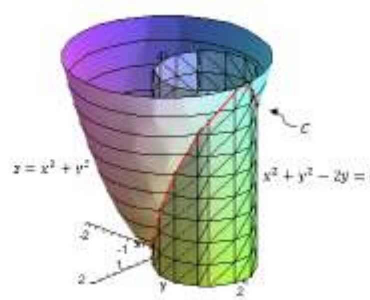
Además, como

$$x^2+y^2-2y=0\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1$$

Se tiene que $x^2+(y-1)^2=1$ es la ecuación del cilindro mostrado en la figura.



Luego, la curva C se obtiene al intersecar el cilindro de ecuación $x^2+(y-1)^2=1$ con el paraboloide de ecuación $z=x^2+y^2$, mostrada en la figura.



Al resolver el sistema: $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+y^2-2y=0\end{cases}$

Resulta $z=2y$, y C puede ser entonces parametrizada como:

$$C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \operatorname{sen} t\ , \quad 0 \le t \le 2\pi \\ z = 2 + 2\operatorname{sen} t \end{cases}$$

De donde,

$$dx = -\operatorname{sen} t dt, \quad dy = \cos t dt \quad y \quad dz = 2\cos t dt$$

Luego,

$$\int_C y dx - x dy + z dz = \int_0^{2\pi} \left[-sen\, t - 1 + 4\cos t + 4\cos t \operatorname{sen} t \right] dt = \left[\cos t - t + 4\operatorname{sen} t + 2\operatorname{sen}^2 t \right]_0^{2\pi} = -2\pi$$

8. Demuestre que el campo vectorial $\vec{F}$ definido por $\vec{F}(x, y) = x^2 y \vec{i} + \frac{x^3}{3}\vec{j}$ es conservativo.

Solución:

$$\frac{\partial\left(\frac{x^3}{3}\right)}{\partial x} = x^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial(x^2 y)}{\partial y} = x^2$$

Como

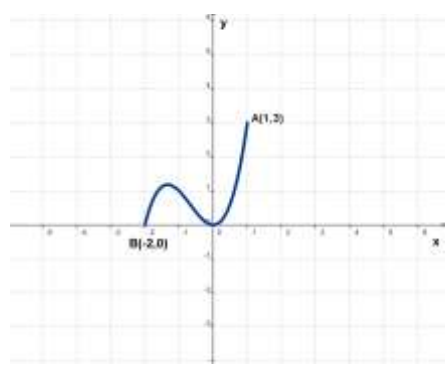
$$\frac{\partial\left(\frac{x^3}{3}\right)}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 y)}{\partial y}$$

El campo $\vec{F}$ es conservativo.

9. Suponga que un campo de fuerza $\vec{F}$ está dado por

$$\vec{F}(x, y) = x^2 y \vec{i} + \frac{x^3}{3}\vec{j}$$

Determine el trabajo que realiza $\vec{F}$ al desplazar un objeto desde A hasta B a lo largo de la curva C mostrada en la figura.



Solución:

El trabajo que realiza $\vec{F}$ sobre el objeto es

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Por el problema anterior el campo vectorial $\vec{F}$ es conservativo, en consecuencia, $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ no depende de la trayectoria.

Sea C_1 el segmento de recta que une los puntos $A(-2,0)$ y $B(1,3)$, el cual puede ser descrito por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + (2+t)\vec{j}$ con $-2 \le t \le 1$.

Luego

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad W = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{i} + \vec{j} \quad \text{y} \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) = t^2(2+t)\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j}$$

En consecuencia,

$$W = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-2}^{1} \left(2t^2 + t^3 + \frac{t^3}{3}\right) dt = \frac{2t^3}{3} + \frac{t^4}{3} \Big|_{-2}^{1} = 1$$

10. Dado el campo vectorial $\vec{F}$ definido por $\vec{F}(x,y) = ye^{xy}\,\vec{i} + xe^{xy}\,\vec{j}$

a) Determine si el campo vectorial $\vec{F}$ es conservativo.

b) Determine el valor de $\int_C \vec{\mathrm{F}} \cdot d\vec{r}$ si C es la curva descrita por:

$$\vec{r}\,(t) = \sec t\,\vec{i} + \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\vec{j} \quad \text{con } 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$$

c) Sea $\vec{G}$ un campo vectorial conservativo definido por $\vec{G}(x,y) = 2xy^2\,\vec{i} + 2xy^2\,\vec{j}$.

Halle el valor de $\int_C \left(-\frac{4}{3}\vec{F} + 5\vec{G}\right) \cdot d\vec{r}$ si C es la elipse de ecuación $4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 1$.

Solución:

a) Dado que la derivadas parciales: $\frac{\partial(ye^{xy})}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy}$ y $\frac{\partial(xe^{xy})}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy}$ son iguales, el campo $\vec{F}$ es conservativo.

b) Como el campo $\vec{F}$ es conservativo, existe una función escalar *f* tal que

$$\vec{F}(x,y)=\nabla f(x,y)$$

Luego,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=y\,e^{xy} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}x\,e^{xy} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=y\,e^{xy} \Rightarrow f(x,y)=\int ye^{xy}\,dx=e^{xy}+g(y)$$

Derivando ambos miembros de $f(x,y)=e^{xy}+g(y)$ con respecto a y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x\,e^{xy}+g'(y) \qquad (2)$$

De (1) y (2): $g'(y)=0 \Rightarrow g(y)=k$

Por lo tanto, una función potencial es $f(x,y)=e^{xy}$

Además,

$$\vec{r}(0)=\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{y} \quad \vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\sqrt{2},1\right)$$

En consecuencia,

$$\int_C \vec{\mathrm{F}}\cdot d\vec{r}=f\left(\sqrt{2},1\right)-f\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{\sqrt{2}}-e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

c) La curva C es cerrada y los campos $\vec{F}$ y $\vec{G}$ son conservativos, por lo tanto

$$\int_C\left(-\frac{4}{3}\vec{F}+5\vec{G}\right)\cdot d\vec{r}=-\frac{4}{3}\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}+5\int_C\vec{G}\cdot d\vec{r}$$

Problemas propuestos

1. Evalúe la integral $\int_C x^4 y \, ds$, donde C es la mitad superior de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 9$.

Respuesta: $\frac{1458}{5}$

2. Evalúe la integral $\int_C \left(x^2 - 3y + 2z\right) ds$, donde C es el segmento de recta que une los puntos $P(1,0,0)$ y $Q(1,2,2)$.

Respuesta: 0

Si la densidad de masa $\delta(x, y, z)$ de un alambre o resorte que está sobre una curva C es conocida, entonces la masa total viene dada por

$$M(C) = \int_C \delta(x, y, z) ds$$

Las coordenadas del centro de masa de C son:

$$x_M = \frac{1}{M(C)} \int_C x \, \delta(x, y, z) ds \qquad y_M = \frac{1}{M(C)} \int_C y \, \delta(x, y, z) ds \qquad z_M = \frac{1}{M(C)} \int_C z \, \delta(x, y, z) ds$$

Las coordenadas del centroide de S son:

$$x_C = \frac{1}{l(C)} \int_C x \, ds \qquad y_C = \frac{1}{l(C)} ds \qquad z_C = \frac{1}{l(C)} \int_C z \, ds$$

Los momentos de inercia con respecto a los ejes son:

$$I_x = \int_C \left(y^2 + z^2\right) \delta(x, y, z) ds \qquad I_y = \int_C \left(x^2 + z^2\right) \delta(x, y, z) ds \qquad I_z = \int_C \left(x^2 + y^2\right) \delta(x, y, z) ds$$

3. Un resorte en forma de espiral está sobre la hélice circular descrita por $\vec{r}(t) = \cos 2t \, \vec{i} + \operatorname{sen} 2t \, \vec{j} + t\vec{k}$ con $0 \le t \le 2\pi$, si $\delta(x, y, z) = 1$. Halle la masa, las coordenadas del centro de masa y los momentos de inercia con respecto al eje z del resorte.

Respuesta: $M = 2\sqrt{5}\,\pi$; $x_M = y_M = 0$, $z_M = \pi$, $I_z = 2\sqrt{5}\,\pi$

4. Un arco de metal delgado, con densidad mayor en su parte inferior que en su parte superior, se representa a lo largo del semicírculo de ecuación $z^2 + y^2 = 2$ con $z \ge 0$, en el plano *yz*, si $\delta(x, y, z) = 3 - z$. Halle la masa, las coordenadas del centro de masa en cada punto del arco.

Respuesta: $M=3\sqrt{2}\,\pi-4$; $x_M=y_M=0$, $z_M=\dfrac{12-\sqrt{2}\,\pi}{3\sqrt{2}\pi-4}$.

5. Evalúe la integral $\int_C x\sqrt{y}\,\mathrm{d}x+2y\sqrt{x}\,\mathrm{d}y$, donde C consiste del arco de círculo de ecuación $x^2+y^2=1$ de $(1,0)$a $(0,1)$ y del segmento de recta que va de $(0,1)$a $(4,3)$.

Respuesta: $\frac{1}{5}\left(66+32\sqrt{3}\right)$

6. Evalúe la integral $\int_C \vec{\mathrm{F}}\cdot d\vec{r}$, para el campo $\vec{\mathrm{F}}$ dado por $\vec{\mathrm{F}}(x,y,z)=x\,\vec{\mathrm{i}}+2y\,\vec{\mathrm{j}}+z\vec{k}$ a lo largo de la curva descrita por $\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+t\,\vec{j}+t\,\vec{\mathrm{k}}$ con $0\le t\le 1$.

Respuesta: 2

7. Evalúe $\int_C \left(x^3+y\right)ds$, si C es la curva con la ecuación paramétrica $x=3t,\quad y=t^3;\quad 0\le t\le 1$.

Respuesta: $14\left(2\sqrt{2}-1\right)$

8. Evalúe $\int_C (x-y)dx+xdy$, si C es la gráfica de $x=y^2$ entre $(4,-2)$ y $(4,2)$.

Respuesta: $-\frac{16}{3}$

9. Evalúe la integral $\int_C \vec{\mathrm{F}}\cdot d\vec{r}$, para el campo $\vec{\mathrm{F}}$ dado por $\vec{\mathrm{F}}(x,y,z)=y^2\,\vec{\mathrm{i}}+x^2\,\vec{\mathrm{j}}$ a lo largo de la curva descrita por $\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+t^2\,\vec{j}$ con $0\le t\le 1$.

Respuesta: $\frac{7}{10}$

10. Evalúe $\int_C xz\,dx+(y+z)dy+x\,dz$, si C es la gráfica de $x=e^t,\quad y=e^{-t},\quad z=e^{2t}$; con $0\le t\le 1$.

Respuesta: $\frac{1}{12}\left(3e^4+6e^{-2}-12e+8e^5-5\right)$

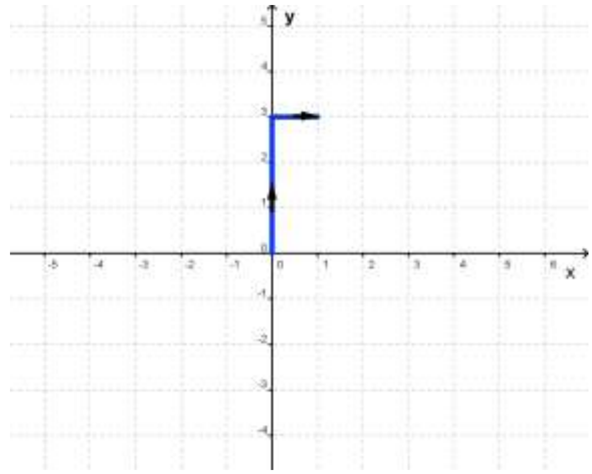
11. Evalúe $\int_C x\,dx-ydy+z\,dz$, si C es la gráfica de $x=\cos t,\quad y=\operatorname{sen} t,\quad z=\dfrac{t}{\pi}$; con $0\le t\le 2\pi$.

Respuesta: 2

12. Evalúe la integral $\int_C \vec{\mathrm{F}}\cdot d\vec{r}$, para el campo $\vec{\mathrm{F}}$ dado por $\vec{\mathrm{F}}(x,y,z)=x^2y\,\vec{\mathrm{i}}+(x-z)\,\vec{\mathrm{j}}+xyz\,\vec{k}$ a lo largo de la curva descrita por $\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+t^2\,\vec{j}+2\vec{k}$ con $0\le t\le 1$.

Respuesta: $-\frac{17}{15}$

13. Evalúe $\int_C xy\,dx + (x+y)dy$, si C es la curva mostrada en la figura.



Respuesta: 6

14. Evalúe $\int_C \left(\frac{2}{3}xy^3 - x^2y\right)dx + x^2y^2dy$, si C es el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(1,0)$ y $C(1,1)$ recorrido con sentido positivo.

Respuesta: $\frac{1}{4}$

15. Evalúe la integral $\int_C \vec{\mathrm{F}}\cdot d\vec{r}$, para el campo $\vec{\mathrm{F}}$ dado por $\vec{\mathrm{F}}(x,y,z) = (3x^2 - 3x)\hat{\mathrm{i}} + 3z\,\hat{\mathrm{j}} + \vec{k}$ a lo largo de la curva de intersección de las gráficas de $x^2 + y^2 = 4$ y $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ recorrida en sentido positivo.

Respuesta: 0

16. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza $\vec{F}$ definido por $\vec{\mathrm{F}}(x,y,z) = 2y^{\frac{3}{2}}\,\hat{\mathrm{i}} + 3x\sqrt{y}\;\hat{\mathrm{j}}$ al desplazar un objeto desde el punto $P(1,1)$ al punto $Q(2,4)$.

Respuesta: 30

17. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza $\vec{F}$ definido por $\vec{\mathrm{F}}(x,y,z) = (2x - y)\hat{\mathrm{i}} + 2z\;\hat{\mathrm{j}} + (y - z)\vec{k}$ al desplazar un objeto a lo largo de la curva de ecuaciones paramétricas $x = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right),\quad y = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right),\quad z = t;\; 0 \le t \le 1.$

Respuesta: $2 - \frac{2}{\pi}$

Si una curva suave C descrita por $\vec{r}(t)$ en el dominio de un campo de velocidades continuas $\vec{F}$ el flujo ϕ a lo largo de la curva C que va desde $t = a$ hasta $t = b$ es:

$$\phi = \int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$$

Donde $\vec{T}$ es el vector tangente unitario, y esta integral se conoce como la integral de flujo. Si la curva es cerrada, el flujo se conoce como circulación alrededor de la curva.

18. El campo de velocidades de un fluido $\vec{\mathrm{F}}$ está dado por $\vec{\mathrm{F}}(x, y, z) = x\,\vec{\mathrm{i}} + y\,\vec{\mathrm{j}} + z\,\vec{k}$. Halle el flujo alrededor de la hélice descrita por $\vec{r}(t) = \cos(4t)\,\vec{i} + sen\,(4t)\,\vec{j} + 4t\,\vec{\mathrm{k}}$ con $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Respuesta: $2\pi^2$

19. Demuestre que la circulación generada por el campo vectorial $\vec{\mathrm{F}}$ dado por $\vec{\mathrm{F}}(x, y) = (x + y)\vec{\mathrm{i}} + x\,\vec{\mathrm{j}}$ alrededor de la curva descrita por $\vec{r}(t) = \cos(2t)\,\vec{i} + sen\,(2t)\,\vec{j}$ con $0 \le t \le \pi$ es cero.

En los problemas del 20 al 23 decida si el campo vectorial dado es conservativo.

20. $\vec{\mathrm{F}}(x, y) = sen\,y\,\vec{\mathrm{i}} + x\cos y\,\vec{\mathrm{j}}$

21. $\vec{\mathrm{F}}(x, y) = \dfrac{y}{x^2}\vec{\mathrm{i}} + \dfrac{1}{x}\vec{\mathrm{j}}$

22. $\vec{\mathrm{F}}(x, y) = \dfrac{2e^{\frac{2x}{y}}}{y}\vec{\mathrm{i}} - \dfrac{2xe^{\frac{2x}{y}}}{y^2}\vec{\mathrm{j}}$

23. $\vec{\mathrm{F}}(x, y) = e^x \cos y\,\vec{\mathrm{i}} + e^x \mathrm{sen}\,y\,\vec{\mathrm{j}}$

Respuestas: **20**) Conservativo **21**) No conservativo **22**) Conservativo **23**) No conservativo

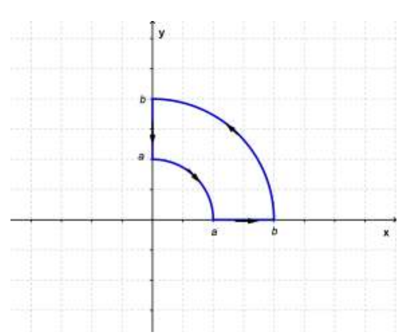
24. Determine los valores de *a* y *b* para que el campo vectorial $\vec{\mathrm{F}}(x,y) = \left(axe^{by} + 2by, 2x^2e^{by} + 2ax\right)$ sea conservativo.

Respuesta: $a = b = 2$

25. Evalúe la integral $\int_{\mathrm{C}} \vec{\mathrm{F}} \cdot d\vec{r}$, para el campo $\vec{\mathrm{F}}$ dado por $\vec{\mathrm{F}}(x, y) = \dfrac{2e^{\frac{2x}{y}}}{y}\vec{\mathrm{i}} - \dfrac{2xe^{\frac{2x}{y}}}{y^2}\vec{\mathrm{j}}$ a lo largo de la circunferencia de centro $\mathrm{C}\left(-\dfrac{7}{3}, -2\right)$ y radio $\sqrt{2}$.

Respuesta: 0

26. Evalúe la integral $\int_{\mathrm{C}} \vec{\mathrm{F}} \cdot d\vec{r}$, para el campo $\vec{\mathrm{F}}$ dado por $\vec{\mathrm{F}}(x, y) = sen\,y\,\vec{\mathrm{i}} + x\cos y\,\vec{\mathrm{j}}$ a lo largo de la curva C mostrada en la figura.



Respuesta: 0

27. Sea *C* la parte de la parte de la curva de intersección en el primer cuadrante de las superficies de ecuaciones $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ y $x^2+(y-2)^2=4$ que parte desde el punto $P(2,2,2\sqrt{2})$ hasta el punto $Q(0,4,0)$.

a) Encuentre una parametrización para la curva *C*.

b) Evalúe la integral $\int_C \frac{\sqrt{4-y}}{\sqrt{x^2-4y+16}}ds$

Respuesta: **a**) $c:\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2+2sen\,t \\ z=\sqrt{8-8sent} \end{cases}$ **b**) $\frac{\pi}{2}$

28. Verifique que el campo vectorial $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{y}{x^2+y^2}\vec{j}$ es conservativo. Determine una función potencial para él.

Respuesta: $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}+1+k$

29. Demuestre que el campo vectorial $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y)=2xye^{x^2y}\vec{i}+x^2e^{x^2y}\vec{j}$ es conservativo. Determine una función potencial para él.

Respuesta: $f(x,y)=e^{x^2y}+2$

30. Demuestre que el campo vectorial $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$ es conservativo. Determine una función potencial para él.

Respuesta: $f(x,y)=-\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+k$

31. **a**) Demuestre que el campo vectorial $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z)=-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z)$ es conservativo. Determine una función potencial para él.

b) Sea *C* la curva intersección de las superficies de ecuaciones $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ y $y=z$. Halle el trabajo realizado por el campo para trasladar una partícula desde el punto $A(2,4,4)$ al punto $B(3,3,3)$.

Respuesta: **a**) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+k$ **b**) $W=\frac{2-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}$

TEOREMA DE GREEN

Definiciones, propiedades y teoremas importantes

Teorema 4.1: (Teorema de Green) Sea *C* una curva plana, suave y cerrada que acota una región *D* del plano. Sea $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ un campo vectorial cuyas funciones componentes admiten derivadas parciales continuas en un conjunto abierto que contiene a *D*. Entonces,

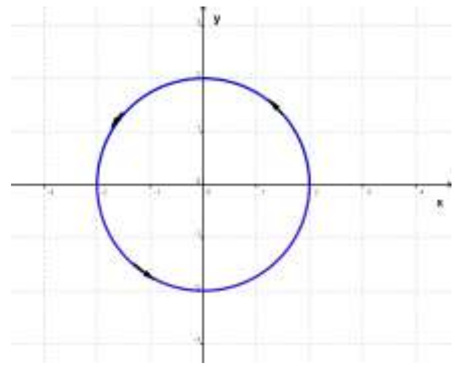
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Problemas resueltos

1. Verifique el teorema de Green para la circunferencia con centro en $C(0,0)$ y radio 2 orientada positivamente y el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = 2y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$.

Solución:

La integral planteada es una integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y) = 2y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$; sobre la curva C que se muestra en la figura.



Evaluemos primero la integral como integral de línea.

Sea C la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$, la cual puede ser parametrizada como

$$C:\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\operatorname{sen} t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

De donde,

$$dx = -2\operatorname{sen} t\, dt \text{ y } dy = 2\cos t\, dt.$$

Al aplicar la definición de integral de línea y al hacer las sustituciones respectivas, resulta,

$$\oint_C 2y\,dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} \left[4\operatorname{sen} t\cdot\left(-2\operatorname{sen} t\right) + 2\cos t \cdot 2\cos t\right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-2 + 6\cos(2t)\right] dt = -2t + 3\operatorname{sen}(2t)\,\Big|_0^{2\pi} = -4\pi$$

Por otra parte, dado que curva C es una curva suave, cerrada, simple y positivamente orientada del plano, y las funciones $P(x,y) = 2y$ y $Q(x,y) = x$ tienen derivadas parciales continuas $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \frac{\partial P}{\partial y} = 2\right)$ en cualquier región abierta que contenga a la región D limitada por la curva C, se cumple el Teorema de Green. Vamos a verificarlo, para ello se debe calcular ahora,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_D (1-2)\,dA = -\iint_D dA = -A(D) = -4\pi$$

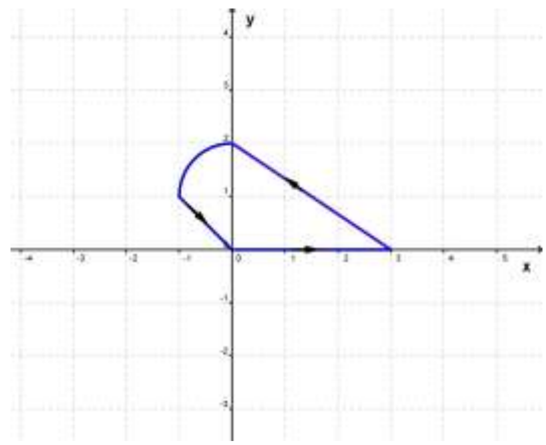
2. Evalúe la integral $\int_C \left(-5y + x^2\,\text{sen}\left(7x^3\right)\right)\text{dx} + \left(\ln\left(y^6+1\right) - \sqrt{2}x\right)\text{dy}$, donde C consiste del segmento de recta que va del punto $P_0(3,0)$ al punto $P_1(0,2)$, seguido del arco del círculo de centro $C(0,1)$ y radio 1 que va de $P_1(0,2)$ al punto $P_2(-1,1)$, seguido del segmento de recta que va del punto $P_2(-1,1)$ al punto $P_3(0,0)$, seguido del segmento de recta que va de $P_3(0,0)$ al punto $P_0(3,0)$, orientada positivamente.

Solución:

La integral planteada es una integral de línea del campo vectorial $\vec{\text{F}}$ dado por

$$\vec{\text{F}}(x,y) = \left(5y + x^2\,\text{sen}\left(7x^3\right)\right)\vec{\text{i}} + \left(\ln\left(\text{y}^6+1\right) - \sqrt{2}x\right)\vec{\text{j}}$$

sobre la curva C que se muestra en la figura.



- Puesto que C es una curva plana, simple, cerrada, suave a pedazos y orientada en sentido positivo, y

- Además, como las funciones componentes P y Q del campo vectorial,

$$\text{P}(x,y) = -5y + x^2\,\text{sen}\left(7x^3\right) \quad \text{y} \quad \text{Q}(x,y) = \ln\left(\text{y}^6+1\right) - \sqrt{2}x$$

tienen derivadas parciales continuas $\left(\frac{\partial \text{Q}}{\partial x} = -\sqrt{2}\,,\ \frac{\partial \text{P}}{\partial y} = -5\right)$ sobre cualquier región abierta que contenga a D, donde D es la región del plano limitada por C.

Por el teorema de Green,

$$\int_C \left(-5y + x^2\,\text{sen}\left(7x^3\right)\right)\text{dx} + \left(\ln\left(y^6+1\right) - \sqrt{2}x\right)\text{dy} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Por lo tanto,

$$\int_C \left(-5y + x^2\,\text{sen}\left(7x^3\right)\right)\text{dx} + \left(\ln\left(y^6+1\right) - \sqrt{2}x\right)\text{dy} = \iint_D \left(-\sqrt{2}+5\right) dA$$

$$= \left(5-\sqrt{2}\right)\iint_D dA = \left(5-\sqrt{2}\right)A(D) = \left(5-\sqrt{2}\right)\left[\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot 2\right] = \left(5-\sqrt{2}\right)\frac{14+\pi}{4}$$

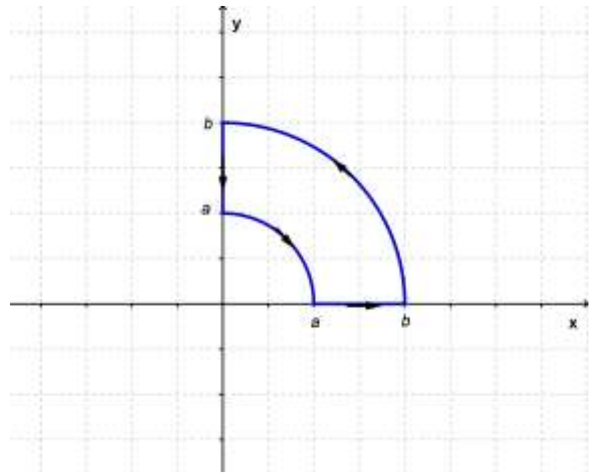
3. Evalúe la integral $\int_C -y^3\,dx + x^3 dy$, donde la curva C es la frontera de la región del plano cuyos puntos satisfacen $a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, con $0 < a < b$, orientada en sentido antihorario.

Solución:

La integral planteada es una integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$ dado por

$$\vec{F}(x, y) = -y^3\,\hat{i} + x^3\,\hat{j}$$

sobre la curva C que se muestra en la figura.



Puesto que C es una curva plana, simple, cerrada, suave a pedazos y orientada positivamente.

Y además las funciones P y Q definidas por

$$P(x, y) = -y^3 \quad \text{y} \quad Q(x, y) = x^3$$

tienen derivadas parciales continuas $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2,\ \frac{\partial P}{\partial y} = -3y^2\right)$ sobre cualquier región abierta que contenga a D, donde D es la región del plano limitada por C.

Por el teorema de Green,

$$\int_C -y^3\,dx + x^3 dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Por lo tanto,

$$\int_C -y^3\,dx + x^3 dy = \iint_D \left(3x^2 + 3y^2\right) dA = 3\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dA$$

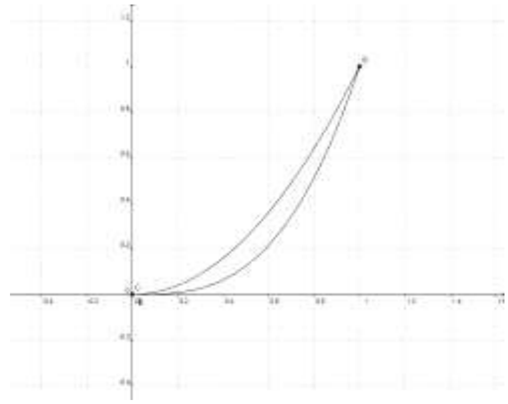
Al aplicar coordenadas polares para resolver la integral, resulta

$$= 3\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dA = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_a^b r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[r^4 \Big|_a^b\right] d\theta = \frac{3\left(b^4 - a^4\right)}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{3\,\pi}{8}\left(b^4 - a^4\right)$$

4. Verifique el Teorema de Green para calcular $\int_C xy\,dx + x^2 dy$, donde C es la curva frontera de la región limitada por $y = x^2$ y $y = x^3$ en sentido antihorario.

Solución:

La integral planteada es una integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y) = xy\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$; sobre la curva C que se muestra en la figura.



Observe que C es una curva plana, simple, cerrada, suave a pedazos y orientada positivamente.

Y además las funciones P y Q definidas por,

$$P(x,y) = xy \quad \text{y} \quad Q(x,y) = x^2$$

tienen derivadas parciales continuas $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x\,,\, \dfrac{\partial P}{\partial y} = x\right)$ sobre cualquier región abierta que contenga a D, donde D es la región del plano limitada por C. Por lo tanto, es aplicable el teorema de Green.

Evaluemos primero la integral como integral de línea.

a) Sea C_1 la parte de C que corresponde a $y = x^3$ y calculemos la integral a lo largo de C_1.

C_1 puede ser parametrizada como $x = t$, $y = t^3$, con $0 \leq t \leq 1$.

De donde,

$$dx = dt \quad \text{y} \quad dy = 3t^2\,dt\,.$$

Al aplicar la definición de integral de línea, y al hacer las sustituciones respectivas, se tiene que,

$$\int_{C_1} xy\,dx + x^2 dy \;=\; \int_0^1 \left[t\cdot t^3 + t^2\cdot 3t^2\right]dt = \frac{4}{5}$$

b) Sea C_2 la parte de C que corresponde a $y = x^2$ y calculemos la integral a lo largo de C_2.

$-C_2$ puede ser parametrizado como $x = t$, $y = t^2$, con $0 \leq t \leq 1$.

De donde,

$$dx = dt \quad \text{y} \quad dy = 2t\,dt\,.$$

Al aplicar la definición de integral de línea de un campo vectorial, y al hacer las sustituciones respectivas, se tiene que,

$$\int_{C_2} xy\,dx + x^2 dy = -\int_0^1 \left[t\cdot t^2 + t^2\cdot 2t\right]dt = -\frac{3}{4}$$

Por lo tanto,

$$\int_C xy\,dx + x^2 dy = \int_{C_1} xy\,dx + x^2 dy + \int_{C_2} xy\,dx + x^2 dy = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20}$$

Calculemos ahora,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D (2x - x)\,dA = \iint_D x\,dA = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} x\,dy\,dx = \int_0^1 \left(x^3 - x^4\right) dx = \frac{1}{20}$$

5. Evalúe $\oint_C y^2 dx + x^2 dy$, donde C es la curva de ecuación $|x| + |y| = 1$, con orientación positiva.

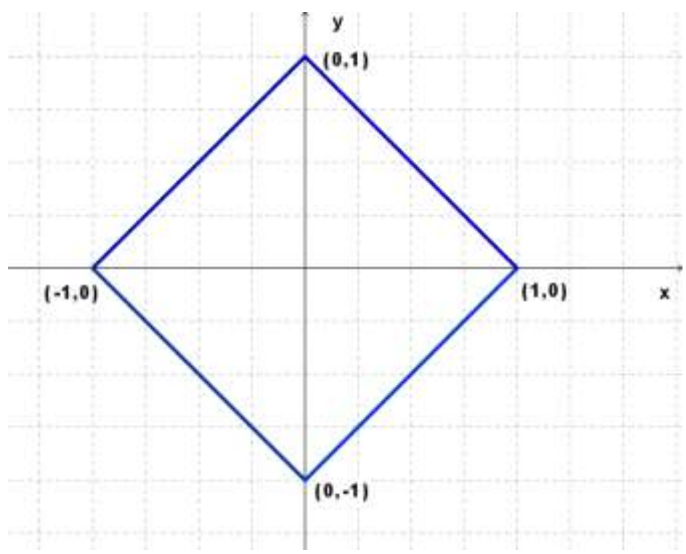
a) Por definición

b) Aplicando el teorema de Green.

Solución:

a) La integral planteada es una integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x, y) = y^2\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$, sobre la curva *C* que se muestra en la figura.

Observe que la curva C es la unión de cuatro segmentos.



Sea C_1 el segmento que corresponde a $x + y = 1,\ 0 \le x \le 1$. - C_1 puede ser parametrizado como $x = t$, $y = 1 - t$, con $0 \le t \le 1$.

De donde,

$$dx = dt \quad \text{y} \quad dy = -dt$$

Al aplicar la definición de integral de línea, y al hacer las sustituciones respectivas, se tiene que,

$$\int_{C_1} y^2\, dx + x^2 dy = -\int_0^1 \left((1-t)^2 - t^2\right)dt = 0$$

Sea C_2 el segmento que corresponde a $y=1+x$, $-1 \leq x \leq 0$. - C_2 puede ser parametrizado como $x=t$, $y=1+t$, con $-1 \leq t \leq 0$.

De donde,

$$dx = dt \text{ y } dy = dt$$

Al aplicar la definición de integral de línea, y al hacer las sustituciones respectivas, se tiene que,

$$\int_{C_2} y^2\, dx + x^2 dy = -\int_{-1}^{0} \left((1+t)^2 + t^2\right)dt = -\frac{2}{3}$$

Sea C_3 el segmento que corresponde a $y=-x-1$, $-1 \leq x \leq 0$. C_3 puede ser parametrizado como $x=t$, $y=-1-t$, con $0 \leq t \leq 1$.

De donde,

$$dx = dt \text{ y } dy = \text{-}dt$$

Al aplicar la definición de integral de línea, y al hacer las sustituciones respectivas, se tiene que,

$$\int_{C_3} y^2\, dx + x^2 dy = \int_{-1}^{0} \left((1-t)^2 - t^2\right)dt = 0$$

Sea C_4 el segmento que corresponde a $y=x-1$, $0 \leq x \leq 1$. C_4 puede ser parametrizado como $x=t$, $y=t-1$, con $0 \leq t \leq 1$.

De donde,

$$dx = dt \text{ y } dy = dt$$

Al aplicar la definición de integral de línea, y al hacer las sustituciones respectivas, se tiene que,

$$\int_{C_4} y^2\, dx + x^2 dy = \int_0^1 \left((t-1)^2 + t^2\right)dt = \frac{2}{3}$$

Dado que,

$$\int_C y^2\, dx + x^2 dy = \int_{C_1} y^2\, dx + x^2 dy + \int_{C_2} y^2\, dx + x^2 dy + \int_{C_3} y^2\, dx + x^2 dy + \int_{C_4} y^2\, dx + x^2 dy$$

Resulta,

$$\int_C y^2\, dx + x^2\, dy = 0 - \frac{2}{3} + 0 + \frac{2}{3} = 0$$

b) Dado que la curva *C* es una curva en el plano, suave a trozos, cerrada, simple y positivamente orientada, y además las funciones componentes P y Q definidas por $\mathrm{P}(x,y)=x^2$ y $\mathrm{Q}(x,y)=y^2$ tienen derivadas parciales continuas $\left(\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}=2x\,,\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}=2y\right)$ en cualquier región abierta que contenga a la región D limitada por las curvas, se cumple el Teorema de Green. Vamos a verificarlo, para ello calculemos, $\iint\limits_{D}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dA$.

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint\limits_{D}\left(2x-2y\right)dA=2\int_{0}^{1}\int_{x-1}^{1-x}(x-y)dydx+2\int_{-1}^{0}\int_{-1-x}^{1+x}(x-y)dydx=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$$

6. Evalúe $\oint\limits_{C}\left(-2y+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+y\sqrt{x^2+y^2}\,dy$, donde *C* es la curva frontera de la región del plano acotada por las gráficas de $y=1+\sqrt{1-x^2}$ y $y=1-\dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$, con orientación positiva.

Solución:

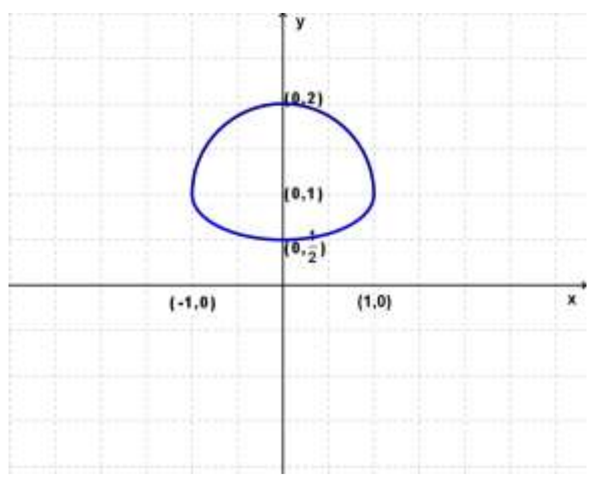
La integral planteada es una integral de línea del campo vectorial $\vec{\mathrm{F}}$ dado por

$$\vec{\mathrm{F}}(x,y)=\left(-2y+x\sqrt{x^2+y^2}\right)\vec{\mathrm{i}}+y\sqrt{\mathrm{x}^2+y^2}\;\vec{\mathrm{j}}$$

Observe que

$$y=1+\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\left(y-1\right)^2+x^2=1 \quad \text{y}$$
$$y=1-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\frac{\left(y-1\right)^2}{\frac{1}{4}}+x^2=1$$

Por lo tanto, la curva *C* corresponde a la parte superior de la circunferencia de centro el punto de coordenadas $\left(0,1\right)$ y radio 1, unida a la parte inferior de la elipse de centro $\left(0,1\right)$, la cual se muestra en la figura.



Dado que la curva *C* es una curva en el plano, suave a trozos, cerrada, simple y positivamente orientada, y además es posible encontrar un conjunto abierto E que contenga a *C* y a la región D limitada por las curvas, tal que las funciones $\mathrm{P}(x,y)=-2y+x\sqrt{x^2+y^2}$ y $\mathrm{Q}(x,y)=y\sqrt{x^2+y^2}$

tienen derivadas parciales continuas $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{yx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial P}{\partial y}=-2+\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ en E, se puede aplicar el Teorema de Green, por lo tanto,

$$\oint_C \left(-2y+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+y\sqrt{x^2+y^2}\,dy=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint_D (2)\,dA=2\int_{-1}^{1}\int_{1-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} dy\,dx=$$

$$=3\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=6\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

Sea $x=\operatorname{sen}\theta$, entonces $dx=\cos\theta\, d\theta$, $x=0\Rightarrow\theta=0$ y $x=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$

Luego,

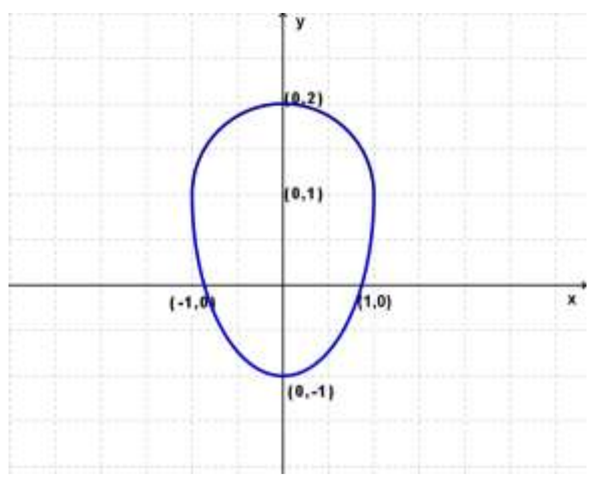
$$6\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=6\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=3\left(\theta+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{2}$$

7. Si en el problema anterior, la curva $y=1-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$ se sustituye por $y=1-2\sqrt{1-x^2}$, ¿es aplicable el teorema de Green?

Solución:

En este caso la gráfica de la curva *C* es la que se observa en la figura.

No es aplicable el teorema de Green para evaluar la integral planteada. ¿Por qué?



8a. Pruebe que el área acotada por una curva cerrada simple C es

$$A_C=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx$$

b) Use a) para hallar el área de la región acotada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Solución:

a) Sean $P(x,y) = -y$ y $Q(x,y) = x$, las cuales tienen derivadas parciales continuas sobre cualquier región abierta limitada por la curva C, dadas por $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$ y $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Luego, por el teorema de Green:

$$\oint_C x\,dy - y\,dx = \iint_D (1-(-1))\,dA = \iint_D (2)\,dA = 2\iint_D dA$$

donde D es la región acotada por C.

Por lo tanto,

$$\oint_C x\,dy - y\,dx = 2A_C$$

es decir,

$$A_C = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

b) La elipse C puede ser parametrizada como: C: $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$, $0 \le \theta \le 2\pi$

De donde,

$$dx = -a\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta \quad \text{y} \quad dy = b\cos\theta\,d\theta.$$

Por a) se tiene que:

$$A_C = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[a\cos\theta\,(b\cos\theta) - b\,\mathrm{sen}\,\theta(-a\,\mathrm{sen}\,\theta)\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[ab\cos^2\theta + ab\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,d\theta = \frac{1}{2}ab\,2\pi = ab\,\pi$$

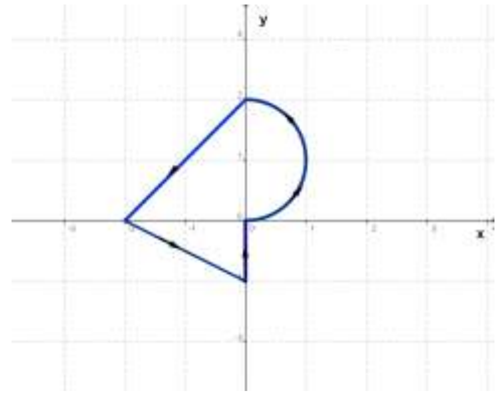
9. Halle el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x^3}{2} + xy\right)\vec{i} + \left(\frac{x^2}{2} + 4x\right)\vec{j}$ para transportar una partícula P a lo largo de la trayectoria siguiente: parte del origen y sigue hasta el punto $A(0,2)$ atravesando el semicírculo de ecuación $x^2 + y^2 = 2y$, luego llega hasta el punto $B(-2,0)$ a través del segmento de recta que une estos dos puntos, y baja a lo largo del segmento de recta que va desde el punto $B(-2,0)$ hasta el punto $C(0,-1)$, finalmente regresa al origen por el eje y.

Solución:

Observe que

$$x^2+y^2=2y \Leftrightarrow x^2+y^2-2y=0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1$$

Y la trayectoria C es la mostrada en la figura.



El trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ es

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Como la curva C es cerrada, simple, orientada positivamente y suave a trozos; y las funciones componentes de $\vec{F}$ tienen derivadas parciales continuas en cualquier conjunto abierto que contenga a C y a la región D acotada por C se puede aplicar el teorema de Green. Entonces

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

Con

$$P(x,y)=\frac{x^3}{2}+xy \quad \text{y} \quad Q(x,y)=\frac{x^2}{2}+4x$$

Luego,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(x+4)-x=4$$

Por lo tanto,

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint_D 4dA=4\iint_D dA=4\,A(D)=4\left[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\right]=4\left[\frac{\pi}{2}+3\right]=2(\pi+6)$$

10. Use el teorema de Green para probar que $\int_C 4y^3dx+12xy^2dy=0$, donde C es cualquier contorno cerrado, simple con orientación positiva.

Solución:

Observe que la curva C y las funciones componentes del campo vectorial $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y)=4y^3\vec{i}+12xy^2\vec{j}$ satisfacen las hipótesis del teorema de Green, y además el campo es conservativo, ya que

$$\frac{\partial\left(4y^3\right)}{\partial y}=12y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial\left(12xy^2\right)}{\partial x}=12y^2$$

Luego, por el teorema de Green

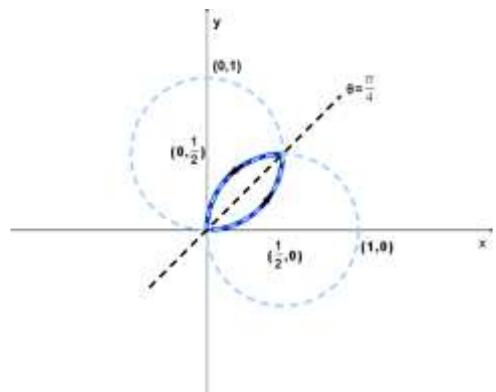
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D\left(\frac{\partial\left(12xy^2\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(4y^3\right)}{\partial y}\right)dA=0$$

11. Halle el valor de $\int_C (x-3y)dx+(2x+y)dy$ donde C es la curva frontera de la región común interior a las curvas de ecuaciones $r=\operatorname{sen}\theta$ y $r=cos\theta$, recorrida en sentido positivo.

Solución:

Observe que

$$r=\operatorname{sen}\theta \Rightarrow r^2=r\operatorname{sen}\theta \Rightarrow x^2+y^2=y$$
$$r=\cos\theta \Rightarrow r^2=rcos\theta \Rightarrow x^2+y^2=x$$
$$x^2+y^2=y \Leftrightarrow x^2+y^2-y=0 \Leftrightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$
$$x^2+y^2=x \Leftrightarrow x^2+y^2-x=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{2}$$



La trayectoria C se muestra en la figura.

Como la curva C es cerrada, simple, orientada positivamente y suave a trozos; y las funciones componentes de $\vec{F}$ tienen derivadas parciales continuas en cualquier conjunto abierto que contenga a C y a la región D acotada por C se puede aplicar el teorema de Green.

Con

$$P(x,y)=x-3y \quad \text{y} \quad Q(x,y)=2x+y$$

Luego,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2-(-3)=5$$

Por lo tanto,

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint_D 5dA=5\iint_D dA=\frac{5}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta+\frac{5}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\theta=\frac{5}{8}(\pi-2)$$

12. Sea R la región del plano exterior a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=1$ e interior a la circunferencia de ecuación $x^2+(y-1)^2=1$.

a) Grafique la región *R*.

b) Determine el trabajo realizado campo de fuerzas $\vec{F}$ dado por

$$\vec{F}(x,y)=\left(5x^2+\frac{y^3}{3}-\frac{2y}{x^2+y^2}+\ln(4+x^2)\right)\vec{i}+\left(-3y^2+xy^2+\frac{2x}{x^2+y^2}+4x\right)\vec{j}$$

sobre un objeto que recorre la curva *C* en sentido antihorario, si *C* es la frontera de la región R.

Solución:

La curva *C* es cerrada, simple, orientada positivamente y suave a trozos.

Además las funciones componentes de $\vec{F}$

$$P(x,y)=5x^2+\frac{y^3}{3}-\frac{2y}{x^2+y^2}+\ln(4+x^2) \text{ y } Q(x,y)=-3y^2+xy^2+\frac{2x}{x^2+y^2}+4x$$

tienen derivadas parciales continuas en cualquier conjunto abierto que contenga a *C* y a la región *R* acotada por *C* .

Luego, por el teorema de Green:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

Al evaluar las derivadas parciales $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ resulta:

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=y^2+\frac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} \text{ y } \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=y^2+\frac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}+4$$

Luego,

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_R 4dA=4A(R)$$

Al resolver la integral en coordenadas polares, resulta

$$x^2+y^2=1\Rightarrow r=1 \text{ y } x^2+(y-1)^2=1\Rightarrow r=2sen\,\theta$$

Las cuales se intersecan en $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ y $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$ ¿por qué?

Por lo tanto,

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_R 4dA = 4A(R) = 4\cdot 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{2sen\theta} r\,dr\,d\theta = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \quad \text{(realice los cálculos)}$$

13. Sean *f* y *g* dos funciones reales de clase C[1] en un conjunto abierto R del plano *xy* que contiene a una curva simple y cerrada C, entonces $\oint_C f\,\nabla g\cdot d\vec{r} = -\oint_C g\nabla f\cdot d\vec{r}$

Solución:

Se tiene que:

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

por lo tanto,

$$f\,\nabla g = \left(f\,\frac{\partial g}{\partial x}, f\,\frac{\partial g}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad g\,\nabla f = \left(g\,\frac{\partial f}{\partial x}, g\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Sea D es la región acotada por C.

Evaluemos primero $\oint_C f\,\nabla g\cdot d\vec{r}$

Sean

$$\mathrm{P}(x,y) = f\,\frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{y} \quad \mathrm{Q}(x,y) = f\,\frac{\partial g}{\partial y}$$

luego,

$$\frac{\partial \mathrm{P}(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f\,\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial g}{\partial x} + f\,\frac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x}\right)$$

y

$$\frac{\partial \mathrm{Q}(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f\,\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial g}{\partial y} + f\,\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}\right)$$

Por el teorema de Green, se tiene que,

$$\oint_C f\,\nabla g\cdot d\vec{r} = \iint_{\mathrm{D}}\left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\right)\mathrm{d}A = \iint_{\mathrm{D}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + f\,\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} - f\,\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}\right)\mathrm{d}A$$

$$= \iint_{\mathrm{D}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)\mathrm{d}A \quad (1)$$

Evaluemos ahora $\oint_C g\nabla f \cdot d\vec{r}$.

Sean

$$\mathrm{P}(x,y) = g\,\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad \mathrm{Q}(x,y) = g\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \mathrm{P}(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(g\,\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial x} + g\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)$$

y

$$\frac{\partial \mathrm{Q}(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(g\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y} + g\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)$$

Por el teorema de Green, se tiene que,

$$\oint_C g\nabla f \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathrm{D}} \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\right) \mathrm{d}A = \iint_{\mathrm{D}} \left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + g\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - g\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) \mathrm{d}A$$

$$= \iint_{\mathrm{D}} \left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right) \mathrm{d}A = -\iint_{\mathrm{D}} \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right) \mathrm{d}A \quad (2)$$

De (1) y (2) resulta:

$$\oint_C f\,\nabla g \cdot d\vec{r} = -\oint_C g\nabla f \cdot d\vec{r}$$

Problemas propuestos

1. Evalúe la integral $\int_C \left(y+x^2\arctan\left(x^4\right)\right)\mathrm{dx}+\left(\mathrm{e}^{\mathrm{sen(2y)}}-3x\right)\mathrm{dy}$.

a) Si C consiste del segmento de recta que va del punto $P_0(0,0)$ al punto $P_1(-1,1)$ y del arco del círculo de centro $C(1,1)$ y radio 2 que va del punto $P_1(-1,1)$ al punto $P_3(3,1)$ seguido del segmento de recta que va del punto $P_3(3,1)$ al punto $P_0(0,0)$, orientada positivamente.

b) C es la trayectoria que se obtiene al cambiar P_3 por $P_3(1,3)$ en la parte a).

Respuesta: **a**) $-8(\pi+1)$ **b**) -4π

2. Calcule $\oint_C x^2y\mathrm{d}x - 3y^2\mathrm{d}y$, donde C es la circunferencia unitaria recorrida en sentido antihorario.

Respuesta: $-\dfrac{\pi}{4}$

3. Evalúe la integral $\int_C \left(5+3y^3+x^2\mathrm{sen}\left(x^4+\sqrt{2}\right)\right)\mathrm{dx}+\left(3^{\cos(2y)}+9xy^2\right)\mathrm{dy}$, donde C consiste de los segmentos de recta que van del punto $P_0(-1,-10)$ al punto $P_1(-1,-2)$, del punto $P_1(-1,-2)$ al punto $P_2(-3,-1)$ del punto $P_2(-3,-1)$ al punto $P_3(-3,-6)$ y del punto $P_3(-3,-6)$ al punto $P_0(-1,-10)$, orientada positivamente.

Respuesta: 0

4. Evalúe la integral $\int_C \left(3y+2y^2+x^2\cos\left(x^4+\sqrt{2}\right)\right)\mathrm{dx}+\left(3^{\mathrm{sen(2y)}}+4xy\right)\mathrm{dy}$, donde C consiste del arco del círculo de centro $C(-2,2)$ y radio 2 que va desde el punto $P_0(0,2)$ al punto $P_1(-2,4)$ seguida de los segmentos de recta que van del punto $P_1(-2,4)$ al punto $P_2(-4,2)$, del punto $P_2(-4,2)$ al punto $P_3(-2,-2)$ y del punto $P_3(-2,-2)$ al punto $P_0(0,2)$, orientada positivamente.

Respuesta: $-3[\pi+10]$

5.**a**) Sea C la curva que consta de la parte de la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=1$ que está en el primer cuadrante, seguida por el segmento de recta que va desde el punto $P_0(0,1)$ hasta el punto $P_1(-1,0)$, seguido del segmento de recta que va desde el punto $P_1(-1,0)$ hasta el punto $P_2(1,0)$. Calcule $\oint_C x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$, como una integral de línea.

b) ¿Es aplicable el teorema de Green para calcular la integral planteada en la parte a)? Justifique su respuesta. Si la respuesta es afirmativa, verifique el teorema de Green para el caso de la integral planteada.

Respuestas: **a**) 0 **b**) Si es aplicable

6. Evalúe $\int_C \frac{y^2}{1+x^2}\,dx + 2y\arctan x\,dy$, si C es la gráfica de $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

Respuesta: 0

7. Evalúe $\int_C (x+y)dx + \left(y + x^2\right)dy$, donde C es frontera de la región del plano comprendida entre las gráficas de $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

Respuesta: -3π.

En los problemas del 8 al 13 verifique el teorema de Green para el campo vectorial $\vec{F}$ y la curva dada.

8. $\vec{F}(x,y) = y^3\,\vec{i} - x^3\,\vec{j}$ y C es la circunferencia unitaria positivamente orientada.

Respuesta: ambas integrales dan $-\frac{3\pi}{2}$

9. $\vec{F}(x,y) = xy\,\vec{i} - 2xy\,\vec{j}$ y C es la curva frontera de la región B definida por

$$B = \left\{(x,y) \in R^2 \,/\, 1 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 3\right\}$$

positivamente orientada.

Respuesta: ambas integrales dan $-\frac{27}{2}$

10. $\vec{F}(x,y) = e^x \operatorname{sen} y\,\vec{i} + e^x \cos y\,\vec{j}$ y C es la curva frontera de la región B definida por

$$B = \left\{(x,y) \in R^2 \,/\, 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

positivamente orientada.

Respuesta: ambas integrales dan 0

11. $\vec{F}(x,y) = x\,\vec{j}$ y C es la curva frontera de la región B limitada exteriormente por la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ e interiormente por las gráficas de $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ y $(x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, positivamente orientada.

Respuesta: ambas integrales dan $\frac{7\pi}{2}$

12. $\vec{F}(x,y) = (4x - 2y)\vec{i} + (2x + 6y)\vec{j}$ y C es la elipse de ecuaciones paramétricas $x = 2\cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, con $0 \le t \le 2\pi$.

Respuesta: ambas integrales dan 8π

13. $\vec{F}(x,y) = \left(e^x + x^2\right)\vec{i} + \left(e^y - xy^2\right)\vec{j}$ y C es la circunferencia de ecuaciones paramétricas $x = 5\cos t$, $y = 5\operatorname{sen} t$, con $0 \le t \le 2\pi$.

Respuesta: ambas integrales dan $-\frac{625\pi}{4}$

14. Demuestre que $\int_C \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy = 0$ para es cualquier trayectoria simple cerrada C del plano que no encierre al origen, ni pase por el origen.

15. Evalúe $\int_C \left(4\sqrt{x^2+1} + 2ye^x + y\right)dx + \left(2e^x + 3e^y\right)dy$, donde C es la curva de ecuación $r = 2\cos\theta$ orientada positivamente.

Respuesta: $-\pi$.

16. Evalúe $\int_C \left(x^2y^4 - \cos x\right)dx + \left(\frac{4}{3}x^3y^3 + 3\operatorname{sen} x + 2x\right)dy$, donde C es la curva descrita por $\vec{r}(t) = 4\cos t\,\vec{i} + 9\operatorname{sen} t\,\vec{j}$ con $0 \le t \le 2\pi$.

Respuesta: 12π.

17. Evalúe $\int_C \left(4sen\,x + \frac{x}{4+3x^2}\right)dx + \left(\ln\left(y^2+2\right) + 3x^2\right)dy$

Si C es la frontera de la región R que está en el primer cuadrante limitada por las curvas de ecuaciones $x^2+y^2=b^2$ y $x^2+y^2=a^2$, con $0 \le a \le b$ y los ejes de coordenadas, recorrida en sentido antihorario.

Respuesta: $2\left(b^3-a^3\right)$

18. Calcule la integral de línea

$$\int_C \left(x^2e^x + x^4\right)dx + \left(y^2 + x + ye^y\right)dy$$

Donde C es la curva frontera (recorrida en sentido positivo) de la región encerrada por las gráficas de: $|y| \le 1$, $0 \le x \le 2$, $x \le 2 - \sqrt{1-y^2}$

Respuesta: $4 - \frac{\pi}{2}$

INTEGRALES DE SUPERFICIE

Definiciones, propiedades y teoremas importantes

Definición 5.1: Dada una función vectorial continua $\vec{r}$ definida en una región *D* del plano *uv* por $\vec{r}(u,v)=\left(f(u,v),g(u,v),h(u,v)\right)$. Entonces el conjunto *S* de los puntos del espacio, $\left(x,y,z\right)$, donde $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$ y $z=h(u,v)$ con (u,v) variando en *D*, se llama superficie en el espacio. Las ecuaciones

$$x=f(u,v),\; y=g(u,v) \text{ y } z=h(u,v)$$

representan una parametrización de la superficie, las variables *u* y *v* se llaman parámetros.

Definición 5.2: Una superficie S parametrizada por $\vec{r}(u,v)=\left(f(u,v),g(u,v),h(u,v)\right)$ es suave, si las funciones $\overrightarrow{r_u}$ y $\overrightarrow{r_v}$ son continuas y $\overrightarrow{r_u}\times\overrightarrow{r_v}$ nunca se anula en el dominio de los parámetros.

Teorema 5.1: El plano tangente a una superficie suave parametrizada por

$$\vec{r}(u,v)=\left(f(u,v),g(u,v),h(u,v)\right)=f(u,v)\vec{i}+g(u,v)\vec{j}+h(u,v)\vec{k}$$

Contiene los vectores $\overrightarrow{r_u}$ y $\overrightarrow{r_v}$, y $\overrightarrow{r_u}\times\overrightarrow{r_v}$ es el vector normal al plano tangente.

Definición 5.3: Si una superficie parametrizada suave *S* está descrita por

$$\vec{r}(u,v)=\left(f(u,v),g(u,v),h(u,v)\right)=f(u,v)\vec{i}+g(u,v)\vec{j}+h(u,v)\vec{k},\quad (u,v)\in D$$

y *S* se cubre sólo una vez cuando (u,v) varía en *D* entonces el área superficial de *S* es

$$A(S)=\iint_S \left\|\overrightarrow{r_u}\times\overrightarrow{r_v}\right\| dA$$

Teorema 5.2:

i) Si *S* es la gráfica de una función real de dos variables: $z=g\left(x,y\right)$ con $\left(x,y\right)\in D$, la cual tiene derivadas parciales continuas, se tiene que

El área de *S* está dada por

$$A(S)=\iint_D\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}\;dA$$

ii) Si *S* es la gráfica de una función real de dos variables: $y=h(x,z)$ con $(x,z)\in D$, la cual tiene derivadas parciales continuas, se tiene que

El área de *S* está dada por

$$A(S)=\iint_D\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+1}\;\mathrm{d}A$$

iii) Si *S* es la gráfica de una función real de dos variables: $x=w(y,z)$ con $(y,z)\in D$, la cual tiene derivadas parciales continuas, se tiene que:

El área de *S* está dada por

$$A(S)=\iint_D\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+1}\;\mathrm{d}A$$

Teorema 5. 2: Sea *f* una función continua de tres variables cuyo dominio incluye una superficie *S* parametrizada por

$$\vec{r}(u,v)=\left(f(u,v),g(u,v),h(u,v)\right)=f(u,v)\vec{i}+g(u,v)\vec{j}+h(u,v)\vec{k}\text{, con } (y,z)\in D$$

si $\vec{r_u}$ y $\vec{r_v}$ son no nulos y no paralelos en el interior de *D*, entonces

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_D f\left(\vec{r}(u,v)\right)\left\|\vec{r_u}\times\vec{r_v}\right\|dA$$

Teorema 5.3:

i) Si *S* es la gráfica de una función real de dos variables: $z=g(x,y)$ con $(x,y)\in D$, la cual tiene derivadas parciales continuas, se tiene que

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}\;\mathrm{d}A$$

ii) Si *S* es la gráfica de una función real de dos variables: $y=h(x,z)$ con $(x,z)\in D$, la cual tiene derivadas parciales continuas, se tiene que

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f(x,h(x,z),z)\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+1}\;dA$$

iii) Si *S* es la gráfica de una función real de dos variables: $x = w(y,z)$ con $(y,z) \in D$, la cual tiene derivadas parciales continuas, se tiene que

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f\left(w(y,z),y,z\right)\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}\;dA$$

Definición 5.4: Una superficie *S* de R^3 es orientable, si se puede decidir sin ambigüedad cual es cada uno de los lados de la superficie. En cada punto de *S* hay dos vectores unitarios normales $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2} = -\overrightarrow{n_1}$. Se dice que *S* es orientada si es posible escoger un vector unitario normal $\vec{n}$ en cada punto de *S*, de modo que $\vec{n}$ varía continuamente. La elección de $\vec{n}$ le dá la orientación a la superficie *S*.

- Si la superficie es cerrada, se dice que la orientación es positiva si el vector normal unitario $\vec{n}$ apunta hacia "fuera", y se dice que *S* tiene orientación negativa si $\vec{n}$ apunta hacia "adentro".
- Si *S* no es cerrada decimos que *S* tiene orientación positiva si al recorrer la frontera de *S* de modo que la superficie quede a nuestra izquierda el vector normal apunta hacia nuestra cabeza.

Teorema 5.4 :

i) Si *S* es la gráfica de una función de dos variables: $z = g(x,y)$ con $(x,y) \in D$, la cual tiene derivadas parciales continuas, podemos considerar a *S* como la gráfica de la superficie de nivel $f(x,y,z) = z - g(x,y) = 0$ para hallar así el vector normal unitario. Entonces un vector normal unitario es:

$$\vec{n} = \frac{\nabla f(x,y,z)}{|\nabla f(x,y,z)|} = \left(\frac{1}{\sqrt{(g_x(x,y))^2 + (g_y(x\ ,y))^2 + 1}}\right)\left(-g_x(x,y)\,\vec{i} - g_y(x,y)\,\vec{j} + \vec{k}\right)$$

En este caso, dado que la componente $\vec{k}$ es positiva, el vector unitario indica la orientación positiva de la superficie.
El otro vector normal unitario es $-\vec{n}$ y apunta hacia la orientación negativa de la superficie.

ii) Si *S* es la gráfica de una función de dos variables: $y = h(x,z)$ con $(x,z) \in D$, la cual tiene derivadas parciales continuas, podemos considerar a *S* como la gráfica de la superficie de nivel $f(x,y,z) = y - h(x,z) = 0$ para hallar así el vector normal unitario. Entonces un vector normal unitario es:

$$\vec{n} = \frac{\nabla f(x,y,z)}{|\nabla f(x,y,z)|} = \left(\frac{1}{\sqrt{(h_x(x,z))^2 + 1 + (h_z(x\ ,z))^2}}\right)\left(-h_x(x,z)\,\vec{i} + \vec{j} - h_z(x,z)\,\vec{k}\right)$$

En este caso, dado que la componente $\vec{j}$ es positiva el vector unitario apunta en la dirección positiva del eje *y*. El otro vector normal unitario es $-\vec{n}$ y apunta en la dirección negativa del eje *y*.

iii) Si S es la gráfica de una función de dos variables: $x = w(y,z)$ con $(y,z) \in D$, la cual tiene derivadas parciales continuas, podemos considerar a S como la gráfica de la superficie de nivel $f(x,y,z) = x - w(y,z) = 0$ para hallar así el vector normal unitario. Entonces un vector normal unitario es:

$$\vec{n} = \frac{\nabla f(x,y,z)}{|\nabla f(x,y,z)|} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(w_y(x,z)\right)^2 + \left(w_z(x\ ,z)\right)^2}} \right) \left(\vec{i} - w_y(y,z)\,\vec{j} - w_z(y,z)\,\vec{k} \right)$$

En este caso, dado que la componente $\vec{i}$ es positiva el vector unitario apunta en la dirección positiva del eje *x*. El otro vector normal unitario es $-\vec{n}$ y apunta en la dirección negativa del eje *x*.

Definición 5.3: Sea $\vec{F}$ un campo vectorial continuo cuyo dominio contiene una superficie *S* orientada, entonces la integral de superficie de $\vec{F}$ sobre *S* se define como:

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{F}(x,y,z) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

donde $\vec{n}$ es el vector normal unitario a la superficie. Esta integral se llama también flujo de $\vec{F}$ a través de *S*.

Teorema 5.5 :

i) Si *S* es la gráfica de una función de dos variables: $z = g(x,y)$ con $(x,y) \in D$,la cual tiene derivadas parciales continuas, se tiene que

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{F}(x,y,z) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_S \vec{F}(x,y,z) \cdot \frac{\nabla f(x,y,z)}{|\nabla f(x,y,z)|}\,\mathrm{d}S$$

Y según sea la orientación de la superficie *S*:

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D \vec{F}(x,y,g(x,y)) \cdot \left(-g_x(x,y)\vec{i} - g_y(x,y)\vec{j} + \vec{k} \right) \mathrm{d}A$$

ó

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D \vec{F}(x,y,g(x,y)) \cdot \left(g_x(x,y)\vec{i} + g_y(x,y)\vec{j} - \vec{k} \right) \mathrm{d}A$$

ii) Si *S* es la gráfica de una función de dos variables: $y = h(x,z)$ con $(x,z) \in D$, la cual tiene derivadas parciales continuas, se tiene que

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \frac{\nabla f(x,y,z)}{|\nabla f(x,y,z)|}\,\mathrm{d}S$$

Y según sea la orientación de la superficie S:

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D \vec{F}(x,h(x,z),z)\cdot \left(-h_x(x,z)\vec{i} + \vec{j} - h_z(x,z)\vec{k}\right)\mathrm{d}A$$

ó

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D \vec{F}(x,h(x,z),z)\cdot \left(h_x(x,z)\vec{i} - \vec{j} + h_z(x,z)\vec{k}\right)\mathrm{d}A$$

iii) Si *S* es la gráfica de una función de dos variables: $x = w(y,z)$ con $(y,z)\in D$, la cual tiene derivadas parciales continuas, se tiene que

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \frac{\nabla f(x,y,z)}{|\nabla f(x,y,z)|}\,\mathrm{d}S$$

Y según sea la orientación de la superficie *S*:

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D \vec{F}(w(y,z),y,z)\cdot \left(\vec{i} - w_y(y,z)\vec{j} - w_z(y,z)\vec{k}\right)\mathrm{d}A$$

ó

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D \vec{F}(w(y,z),y,z)\cdot \left(-\vec{i} + w_y(y,z)\vec{j} + w_z(y,z)\vec{k}\right)\mathrm{d}A$$

Problemas resueltos

1. Halle la ecuación cartesiana e identifique la superficie S descrita por

$$\vec{r}(u,v) = (u+v, 4-v, 1+2u+4v)$$

Solución:

Observe que

$$x = u+v \qquad y = 4-v \quad \text{y} \quad z = 1+2u+4v$$

De donde

$$\begin{cases} 4-v = y \\ u+v = x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} v = 4-y \\ u = x+y-4 \end{matrix}$$

Por lo tanto,

$$z = 1+2u+4v \Rightarrow z = 1+2(x+y-4)+4(4-y) \Rightarrow z = 2x-2y+9$$

En consecuencia S es el plano de ecuación $z = 2x-2y+9$.

2. Halle unas ecuaciones paramétricas en términos de *u* y *v* de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 36$

Solución:

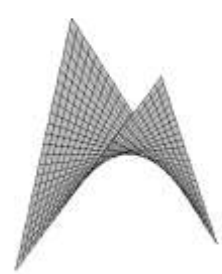
Sean

$$x = 6\cos u \,\text{sen} v \quad y = 6\text{sen}\, u\, \text{sen} v \qquad z = 6\cos v \ \text{ con } \ 0 \le u \le 2\pi \ \text{ y } \ 0 \le v \le \pi$$

Observe que

$$x^2+y^2+z^2 = 36\cos^2 u\,\text{sen}^2 v + 36\text{sen}^2 u\,\text{sen}^2 v + 36\cos^2 v = 36\text{sen}^2 v(\cos^2 \text{u} + \text{sen}^2 u) + 36\cos^2 v$$
$$= 36\text{sen}^2 v + 36\cos^2 v = 36$$

3. Sea S la superficie mostrada en la figura. Si S es descrita por $\vec{r}(u,v) = (u-v, u+v, uv)$ y D el disco unitario en el plano *uv*. Halle el área de $\vec{r}(D)$.



Solución:

$$\overrightarrow{T_u} = \vec{i} + \vec{j} + v\vec{k} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{T_v} = -\vec{i} + \vec{j} + u\vec{k}$$

Luego,

$$\overrightarrow{T_u} \times \overrightarrow{T_v} = (u-v)\vec{i} + (-v-u)\vec{j} + 2\vec{k}$$

Y

$$\left\|\overrightarrow{T_u} \times \overrightarrow{T_v}\right\| = \sqrt{(u-v)^2 + (-v-u)^2 + 4} = \sqrt{2u^2 + 2v^2 + 4}$$

En consecuencia

$$\acute{A}rea\ de\left(\vec{r}(D)\right) = \iint_D \sqrt{2u^2 + 2v^2 + 4} \quad dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2r^2 + 4}\, r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{3}\left(6\sqrt{6.} - 8\right)$$

4. Calcule el área total de la superficie del sólido acotado por sus intersecciones con las superficies cuyas ecuaciones son $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ y $z = 4$.

Solución:

Sean S_1 la superficie inferior, S_2 la superficie superior y sea S_3 la superficie lateral.

a) S_1 es la superficie de ecuación $z = 0$ con $(x, y) \in D_1$, donde D_1 es la proyección de S_1 en el plano xy.

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA = dA \Rightarrow A(S_1) = \iint_{D_1} dA = A(D_1) = 4\pi$$

b) S_2 es la superficie de ecuación $z = 4$ con $(x, y) \in D_2$, donde D_2 es la proyección de S_2

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA = dA \Rightarrow A(S_2) = \iint_{D_2} dA = A(D_1) = 4\pi$$

c) La superficie lateral puede ser descrita por

$$\vec{r}(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, z), \quad \text{con } 0 \le \theta \le 2\pi \text{ y } 0 \le z \le 4$$

$$\overrightarrow{T_\theta} = -2\operatorname{sen}\theta\vec{i} + 2\cos\theta\vec{j} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{T_z} = \vec{k}$$

Luego,

$$\overrightarrow{T_\theta} \times \overrightarrow{T_z} = 2\cos\theta\vec{i} + 2\operatorname{sen}\theta\vec{j} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{T_\theta} \times \overrightarrow{T_z}\right\| = 2$$

En consecuencia,

$$A(S_3) = \iint_{D_3} 2d\theta\, dz = 2\int_0^{2\pi}\int_0^4 d\theta\, dz = 16\pi$$

Por lo tanto, el área total es

$$A(S) = 4\pi + 4\pi + 16\pi = 24\pi$$

5. Resuelva el problema anterior, sustituyendo la superficie superior por el plano de ecuación $z = 2 + x$.

Solución:

El área de la superficie lateral, en este caso, la superficie viene descrita por

$$\vec{r}(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, z), \quad \text{con } 0 \le \theta \le 2\pi \text{ y } 0 \le z \le 2 + 2\cos\theta$$

Luego,

$$A(S_3) = \iint_{D_3} 2d\theta\, dz = 2\int_0^{2\pi} \int_0^{2+2\cos\theta} dz\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} (2 + 2\cos\theta)\, d\theta = 8\pi$$

Si S_2 es la superficie de ecuación $z = 2 + x$ con $(x, y) \in D_2$, donde D_2 es la proyección de S_2 se tiene que

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA = \sqrt{2} dA \Rightarrow A(S_2) = \sqrt{2} \iint_{D_2} dA = A(D_1) = 4\sqrt{2}\pi$$

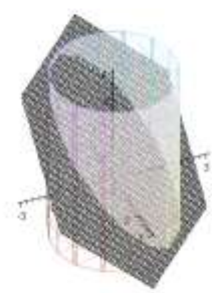
Y el área total es

$$A(S) = 4\pi + 4\sqrt{2}\pi + 8\pi = \left(12 + 4\sqrt{2}\right)\pi = 4\pi\left(3 + \sqrt{2}\right)$$

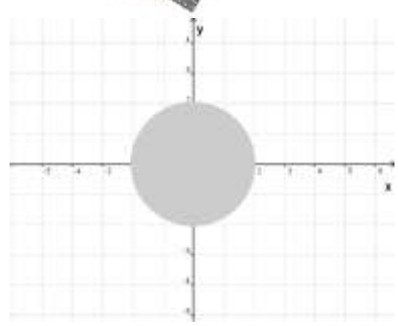
6. Halle el área de la parte del plano de ecuación $x + y + z = 1$ que se encuentra dentro del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

Solución:

Observe que S es la porción del plano de ecuación $x + y + z = 1$, que queda dentro del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 4$. La gráfica de la superficie S se muestra en la figura.



Si se considera a *S* como la gráfica de $z = f(x, y) = 1 - x - y$ con $(x, y) \in D$, donde *D* es la región del plano *xy* limitada por la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$, la cual se muestra en la figura.



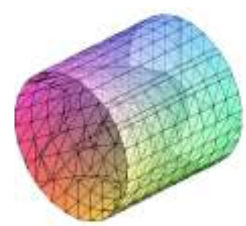
Se tiene que:

$$A(S)=\iint_D \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1}\,dA=\sqrt{3}\iint_D dA=\sqrt{3}\,A(D)=4\sqrt{3}\,\pi$$

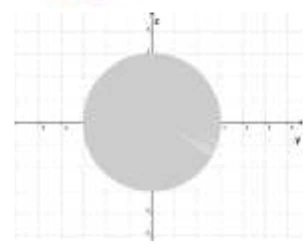
7. Halle el área de la parte de la superficie de ecuación $x=2y^2+2z^2$ que se encuentra dentro del cilindro de ecuación $y^2+z^2=9$.

Solución:

La gráfica de la superficie S se muestra en la figura.



En este caso, *S* es la gráfica de $x=g(y,z)=2y^2+z^2$ con $(y,z)\in D$, donde *D* es la región del plano *yz* limitada por la gráfica de la circunferencia de ecuación $y^2+z^2=9$, la cual se muestra en la figura.



Se tiene entonces que:

$$A(S)=\iint_D \sqrt{(4y)^2+(4z)^2+1}\ \mathrm{d}A=\int_0^{2\pi}\int_0^{3} r\sqrt{16r^2+1}\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{24}\left((145)^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

8. Halle el área de la superficie de ecuación $z=4-x^2-y^2$ comprendida entre los planos de ecuaciones $z=0$, $x=0$ y $\sqrt{3}\,y-3x=0$.

Solución:

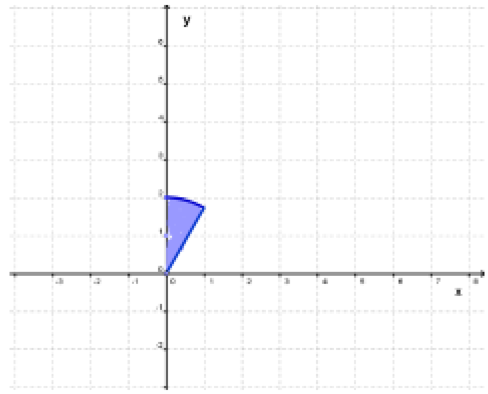
Observe que $z=4-x^2-y^2$ es la ecuación de un paraboloide que abre hacia abajo cuya proyección en el plano xy se muestra en la figura.

Como

$$\sqrt{3}\,y-3x=0\Rightarrow y=\sqrt{3}x$$

En coordenadas polares

$$y=\sqrt{3}x\Rightarrow \tan\theta=\sqrt{3}\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$$



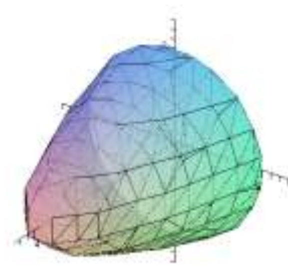
Se tiene entonces que

$$A(S)=\iint_D \sqrt{4x^2+4y^2+1}\ \mathrm{d}A=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{72}\left((17)^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

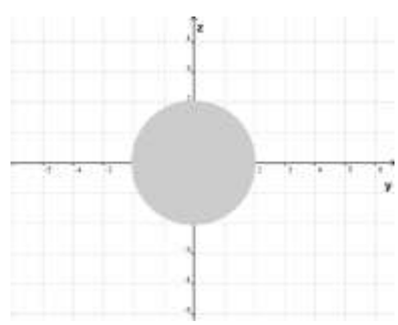
9. Calcule $\iint_S \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}dS$ donde *S* es la parte del paraboloide de ecuación $x=4-y^2-z^2$, que se encuentra frente al plano *yz*

Solución:

Observe que se debe resolver la integral de superficie del campo escalar $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}$ sobre la superficie S. Donde S es la superficie que se muestra en la figura.



En este caso, *S* es la gráfica de $x=g(y,z)=4-y^2-z^2$ con $(y,z)\in D$, donde *D* es la región del plano *yz* limitada por la gráfica de la circunferencia de ecuación $y^2+z^2=4$, la cual se muestra en la figura.



Se tiene que:

$$I=\iint_S \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}dS=\iint_D \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\sqrt{1+(2z)^2+(2y)^2}\,dA$$

En coordenadas polares, la integral planteada es igual a:

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\left[2r\sqrt{1+4r^2}+\ln\left|2r+\sqrt{1+4r^2}\right|\right]_0^2\mathrm{d}\theta$$

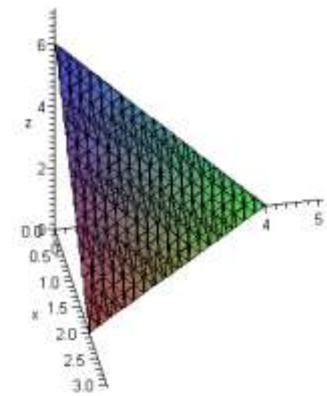
$$=\int_0^{2\pi}\left[\sqrt{17}+\frac{1}{4}\ln\left|4+\sqrt{17}\right|\right]\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\left[4\sqrt{17}-\ln\left(-4+\sqrt{17}\right)\right]$$

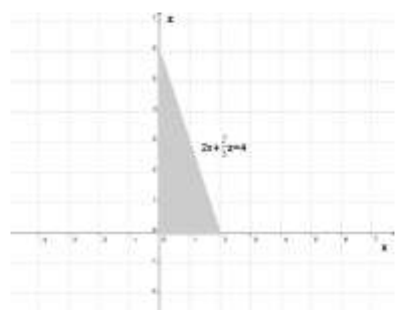
10. Evalúe $\iint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$, donde $\vec{F}(x,y,z)=3y\,\vec{i}+x\,\vec{j}+z\,\vec{k}$. Si *S* es la parte del plano de ecuación $2x+y+\frac{2}{3}z=4$ que se encuentra en el primer octante.

Solución:

La gráfica de la superficie sobre la cual se integra S se muestra en la figura.

Observe que el vector normal al plano tiene su componente $\vec{j}$ positiva.





Observe que se puede considerar a S como la gráfica de $y=h(x,z)=-2x-\frac{2}{3}z+4$ con $(x,z)\in D$, donde D es la región del plano *xz* limitado por $2x+\frac{2}{3}z=4$, $x=0$ y $z=0$, la cual se observa en la figura.

El vector normal a dicha superficie es:

$$\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{\left(h_x(x,z)\right)^2+1+\left(h_z(x,z)\right)^2}}\right)\left(2\vec{i}+\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}\right)$$

En consecuencia,

$$\iint_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iint_D \vec{F}(x,h(x,z),z)\cdot\left(-h_x(x,z)\vec{i}+\vec{j}-h_z(x,z)\vec{k}\right)\mathrm{d}A$$

$$=\iint_D\left(3\left(4-2x-\frac{2}{3}z\right)\vec{i}+x\,\vec{j}+z\,\vec{k}\right)\cdot\left(2\vec{i}+\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}\right)\mathrm{d}A=\iint_D\left(24-\frac{10}{3}z-11x\right)\mathrm{d}A$$

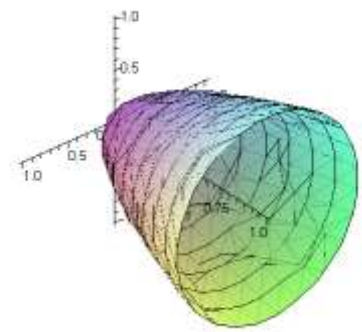
$$=\int_0^2\int_0^{6-3x}\left(24-11x-\frac{10}{3}z\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=60$$

11. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z)=y\,\vec{j}-z\,\vec{k}$, a través de la superficie cerrada formada por el paraboloide de ecuación $y=x^2+z^2$, $0\le y\le 1$, y el disco $0\le x^2+z^2\le 1$, $y=1$.

Solución:

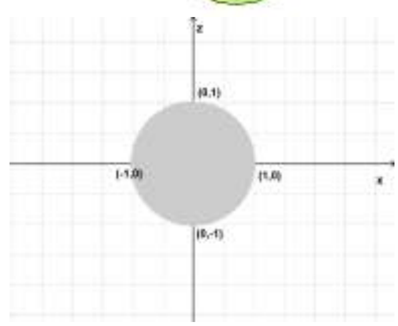
En este ejercicio se debe evaluar la integral de superficie del campo vectorial $\vec{F}$ sobre la superficie S, es decir, debemos calcular $\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

Sobre la superficie S se muestra en la figura.



En este caso S es la unión de dos superficies S_1 y S_2.

a) Sea S_1 la parte del paraboloide $y=x^2+z^2$ con $0\le y\le 1$. S_1 se puede considerar como la gráfica de $y=h(x,z)=x^2+z^2$ con $(x,z)\in D$, donde D es la región del plano *xz* limitado por $x^2+z^2=1$, la cual se observa en la figura.



Observe que el vector normal al paraboloide tiene su componente $\vec{j}$ negativa, entonces que el vector normal a dicha superficie es:

$$\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{(h_x(x,z))^2+1+(h_z(x\ ,z))^2}}\right)\left(2x\,\vec{i}-\vec{j}+2z\,\vec{k}\right)$$

Y

$$\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iint_{S_1}\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iint_D\vec{F}(x,h(x,z),z)\cdot\left(h_x(x,z)\vec{i}-\vec{j}+h_z(x,z)\vec{k}\right)\mathrm{d}A$$

$$=\iint_D\left((x^2+z^2)\vec{j}-z\,\vec{k}\right)\cdot\left(2x\vec{i}-\vec{j}+2z\vec{k}\right)\mathrm{d}A=-\iint_D\left(x^2+3z^2\right)\mathrm{d}A$$

La integral planteada se puede resolver aplicando coordenadas polares,

$$-\iint_D\left(x^2+3z^2\right)\mathrm{d}A=-\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(r^2\cos^2\theta+3r^2\mathrm{sen}^2\,\theta\right)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\theta+3\mathrm{sen}^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=$$

$$-\frac{1}{4}[4\pi]=-\pi$$

b) Sea S_2 el disco definido por $0 \le x^2 + z^2 \le 1$, $y = 1$

Observe que el vector normal al disco es $\vec{j}$, entonces que

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \left(\vec{j}y - z\vec{k}\right) \cdot \left(\vec{j}\right) dA = \iint_D dA = A(D) = \pi$$

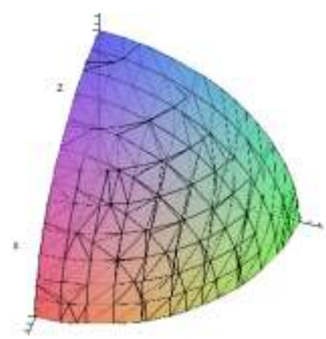
En consecuencia

$$\iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

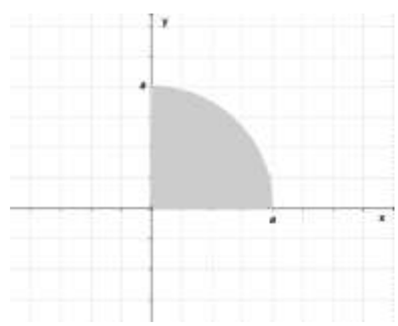
12. Evalúe $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, si S es la parte de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, que está en el primer octante, en dirección de la normal apuntando hacia arriba.

Solución:

La gráfica de la superficie S se muestra en la figura



Observe que se puede considerar a *S* como la gráfica de $z = g(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ con $(x, y) \in D$, donde *D* es la región del plano *xy* que está en primer cuadrante limitada por $x^2 + y^2 = a^2$ y los ejes de coordenadas, la cual se observa en la figura.



Observe que el vector normal al cono apunta hacia arriba, luego su componente $\vec{k}$ es positiva, se tiene entonces que el vector normal a dicha superficie es:

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{(g_x(x,y))^2 + (g_y(x\ ,y))^2 + 1}} \right) \left(-g_x(x,y)\,\vec{i} - g_y(x,y)\,\vec{j} + \vec{k} \right)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{(g_x(x,z))^2 + (g_y(x\ ,z))^2 + 1}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,\vec{j} + \vec{k} \right)$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{F}(x,y,z) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S = \iint_D \vec{F}(x,y,g(x,y)) \cdot \left(-g_x(x,y)\vec{i} - g_y(x,y)\vec{j} + \vec{k} \right) \mathrm{d}A$$

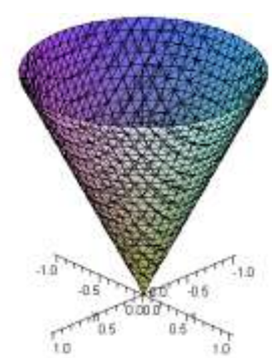
$$= \iint_D \left(x\vec{i} + y\,\vec{j} + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,\vec{k} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,\vec{j} + \vec{k} \right) \mathrm{d}A$$

$$= \iint_D \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, \mathrm{d}A = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^{a} = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{a^3\pi}{2}$$

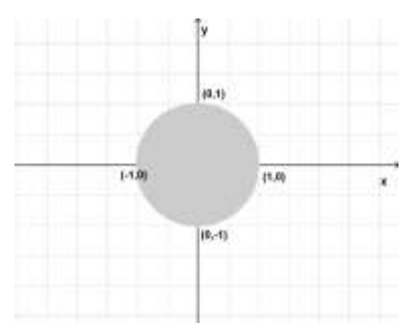
13. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z) = -\vec{k}$, a través del cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$, en dirección a la normal exterior.

Solución:

En este ejercicio se debe evaluar la integral de superficie del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = -\vec{k}$ sobre la superficie S, es decir, se pide calcular $\iint_S \vec{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$. La gráfica de la superficie S se muestra en la figura.



Observe que se puede considerar a *S* como la gráfica de $z = g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $(x,y) \in D$, donde *D* es la región del plano *xy* limitado por la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, la cual se observa en la figura.



En este caso, que el vector normal al cono $\vec{n}$ apunta hacia abajo, luego su componente $\vec{k}$ es negativa, se tiene entonces que el vector normal a dicha superficie es:

$$\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{(g_x(x,y))^2+(g_y(x\ ,y))^2+1}}\right)\left(g_x(x,y)\,\vec{i}+g_y(x,y)\,\vec{j}-\vec{k}\right)$$

Al evaluar las derivadas parciales resulta:

$$\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{(g_x(x,z))^2+(g_y(x\ ,z))^2+1}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{j}-\vec{k}\right)$$

Por lo tanto,

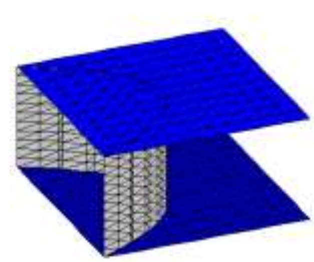
$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}\,dS=\iint_D \vec{F}(x,y,g(x,y))\cdot\left(g_x(x,y)\vec{i}+g_y(x,y)\vec{j}-\vec{k}\right)dA$$

$$=\iint_D\left(-\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{j}-\vec{k}\right)dA=\iint_D dA=A(D)=\pi$$

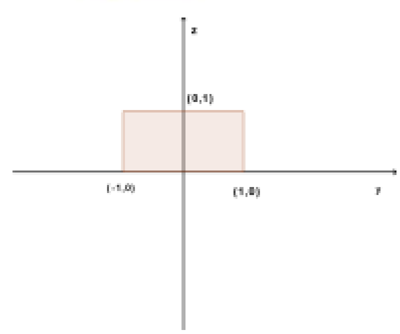
14. Evalúe $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, donde $\vec{F}(x,y,z)=y^2\,\vec{j}-yz\,\vec{k}$, en dirección de la normal exterior. Si *S* es la parte del cilindro parabólico de ecuación $x=y^2$, $-1\le y\le 1$, cortada por los planos $z=0$ y $z=1$.

Solución:

La gráfica de la superficie sobre la cual se integra S se muestra en la figura.



Observe que se puede considerar a S como la gráfica de $x=w(y,z)=y^2$ con $(y,z)\in D$, donde D es la región del plano *yz* limitada por $y=-1$, $y=1$, $z=0$ y $z=1$, la cual se muestra en la figura.



.

Por lo tanto, el vector normal $\vec{n}$ a dicha superficie es:

$$\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+(w_y(x,z))^2+(w_z(x\ ,z))^2}}\right)\left(\vec{i}-2y\,\vec{j}\right)$$

Por lo tanto,

$$\iint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_D \vec{F}(w(y,z),y,z)\cdot\left(\vec{i}-w_y(y,z)\vec{j}-w_z(y,z)\vec{k}\right)\mathrm{d}A$$

$$=\iint_D \left(y^2\,\vec{j}-yz\,\vec{k}\right)\cdot\left(\vec{i}-2\vec{j}\right)\mathrm{d}A=\iint_D\left(-2y^3\right)\mathrm{d}A=-2\int_0^1\int_{-1}^1 y^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0$$

15. Sea $\vec{F}$ el campo vectorial definido por $\vec{F}(x,y,z)=x\,\vec{i}+2y\,\vec{j}+z^2\,\vec{k}$ y sea S la porción del plano de ecuación $2x+y+z=1$ que está en el primer octante. Se sabe que

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D f\,(x,y,g(x,y))\;\mathrm{d}A$$

Determine la función *f* y la región *D*.

Solución:

Observe que podemos considerar a *S* como la gráfica de $z=g(x,y)=1-2x-y$ con $(x,y)\in D$, donde *D* es la región del plano *xy* limitado por $x=0$, $y=0$ y $2x+y=1$.

Observe que el vector normal al plano apunta hacia arriba, luego su componente $\vec{k}$ es positiva, se tiene entonces que el vector normal a dicha superficie es:

$$\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{\left(g_x(x,y)\right)^2+\left(g_y(x\ ,y)\right)^2+1}}\right)\left(-g_x(x,y)\,\vec{i}-g_y(x,y)\,\vec{j}+\vec{k}\right)$$

$$\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{\left(g_x(x,z)\right)^2+\left(g_y(x\ ,z)\right)^2+1}}\right)\left(2\,\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)$$

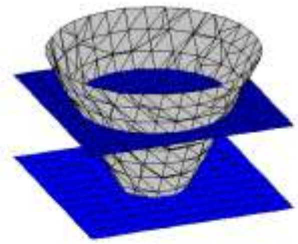
De donde,

$$\iint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_D \vec{F}(x,y,g(x,y))\cdot\left(-g_x(x,y)\vec{i}-g_y(x,y)\vec{j}+\vec{k}\right)\mathrm{d}A$$

Por lo tanto

$$f\,(x,y,z)=\left(x\,\vec{i}+2y\,\vec{j}+(1-2x-y)^2\,\vec{k}\right)\cdot\left(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)=2x+2y+(1-2x-y)^2$$
$$=4x^2+y^2+4xy-2x+1$$

16. Una lámina tiene la forma de un cono truncado de ecuación $z=\sqrt{x^2+y^2}$, situada entre los planos de ecuaciones $z=4$ y $z=9$. Si se sabe que en cada punto de la lámina la densidad de masa de la lámina es $\delta(x,y,z)=x^2z$, halle su masa



La masa de una superficie S viene dada por la integral

$$M=\iint_S \delta(x,y,z)dS$$

Como

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Se tiene que

$$dS=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}dA=\sqrt{2}dA$$

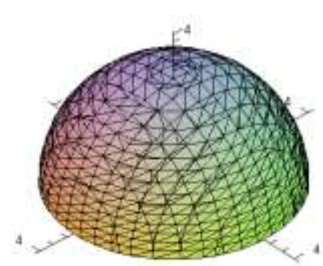
Luego, la masa es

$$M=\sqrt{2}\iint_S \delta(x,y,z)dS=\sqrt{2}\iint_R x^2 z dA=\sqrt{2}\iint_R x^2\sqrt{x^2+y^2}dA=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_4^9 r^2\cos^2\theta\cdot r\cdot r\,dr\,d\theta=11605\sqrt{2}\pi$$

17. Una lámina tiene la forma de una esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=a^2$. Si se sabe que en cada punto de la lámina la densidad de masa de la lámina $\delta(x,y\,z)$ es igual a la distancia que hay entre ese punto y el plano *xy*, pruebe que la masa de la lámina es $M=2\pi a^3$.

Solución:

Consideremos la parte superior de la esfera, como se muestra en la figura.



La masa de una superficie S viene dada por la integral

$$M=\iint_S \delta(x,y,z)dS$$

Luego,

$$M=2\iint_S \delta(x,y,z)dS$$

Como

$$\delta(x, y, z) = d\big(P(x, y, z), P_0(x, y, 0)\big) = \sqrt{z^2} = |z| = z, \quad \text{ya que } z \geq 0$$

Sabemos que

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

De manera que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

Por otra parte,

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y2}}}\right)^2 + 1}\, dA$$

$$dS = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dA = \frac{a}{z}\, dA$$

Luego, la masa es

$$M = 2\iint_S \delta(x, y, z) dS = 2\iint_S z dS = 2\iint_R z \frac{a}{z}\, dA$$

Donde R es la proyección de S sobre el plano xy.

En consecuencia,

$$M = 2\iint_R z \frac{a}{z}\, dA = 2a\iint_R dA = 2a\, A(R) = 2a \cdot \pi a^2 = 2a^3\pi$$

Problemas propuestos

En los problemas del 1 al 3 halle la ecuación cartesiana e identifique la superficie S de ecuaciones paramétricas dadas.

1. $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{u^2 + v^2}$ con $u \geq 0$, $v \geq 0$

2. $x = u$, $y = u^2 + v^2$, $z = v$

3. $x = \cos u$, $y = \operatorname{sen} u$, $z = v$, $0 \leq u \leq 2\pi$

Respuestas :**1**) Parte superior del cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que está en el primer octante.

2) Paraboloide circular de ecuación $y = x^2 + z^2$ y que está por encima del plano *xz*.

3) Superficie cilíndrica que se extiende paralela al eje z, de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

En los problemas del 4 al 7 halle unas ecuaciones paramétricas en término de *u* y *v* de la superficie de ecuaciones cartesiana dadas.

4. $3z - x + 4y = 3$

5. $4 = x^2 + y^2$, $1 \leq z \leq 4$

6. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leq z \leq 2$

7. $2x + z = 1$, $0 \leq y \leq 1$

Respuestas: **4**) $x = u$, $y = v$, $z = \frac{u}{3} - \frac{4}{3}v + 1$ **5**) $x = 2\cos u$, $y = 2\operatorname{sen} u$, $z = v$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $1 \leq v \leq 4$

6) $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{u^2 + v^2}$, $1 \leq u^2 + v^2 \leq 4$ **7**) $x = u$, $y = v$, $z = 1 - 2u$, $0 \leq v \leq 1$

8. Halle el área de la superficie que consta de la porción del cono de ecuaciones paramétricas $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$, $z = u$ con $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$

Respuesta: $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^3$

9. Halle el área de la parte del paraboloide de ecuación $y = x^2 + z^2$ que se encuentra dentro del cilindro de ecuación $x^2 + z^2 = 9$.

Respuesta: $\frac{\sqrt{37^3} - 1}{6}\pi$

10. Demuestre que el área de la superficie de una esfera de radio R es $4\pi R^2$.

11. Calcule el área total de la superficie del sólido acotado por por las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ y $z = x + 2$.

Respuesta: $\left(5 + \sqrt{2}\right)\pi$

12. Encuentre el área de la porción del paraboloide hiperbólico de ecuación $z = xy$ que se encuentra dentro del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 9$.

Respuesta: $\frac{2\pi}{3}\left(10^{\frac{3}{2}}-1\right)$

13. Halle el área de la superficie de ecuación $y=x^2+z^2$, que se encuentra a la izquierda del plano $y=4$.

Respuesta: $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)$

14. Halle el área de la superficie definida por $x+y+z=1$, con $2x^2+y^2\leq 1$.

Respuesta: $\sqrt{\frac{3}{2}}\,\pi$

15. Halle el área de las porciones de la esfera unitaria que se encuentran dentro del cilindro de ecuación $x^2+y^2=x$.

Respuesta: 2π

16. Calcule $\iint_S xyz\,\mathrm{d}S$ donde *S* es la parte del plano de ecuación $x+y+z=1$ en el primer cuadrante.

Respuesta: $\frac{\sqrt{3}}{20}$

17. Calcule $\iint_S (x+y)\mathrm{d}S$ donde S es la parte del plano de ecuación $2x+3y+z=6$ en el primer octante.

Respuesta: $3\sqrt{14}$

18. Calcule $\iint_S \left(y^2x+z^2x\right)\mathrm{d}S$ donde *S* es la semiesfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=4$, $x\geq 0$.

Respuesta: 16π

19. Evalúe $\iint_S x^2$, donde S es la mitad superior de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=8$

Respuesta: $\frac{128}{3}\pi$

20. Calcule $\iint_S x\,\mathrm{d}S$ donde S es la parte del plano de ecuación $x+y+z=1$, en el primer octante.

Respuesta: $\frac{\sqrt{3}}{6}$

21. Calcule $\iint_S e^x\left(z-3x\right)\mathrm{d}S$ donde S es la superficie de ecuación $z=3x+4y$, con $0\le x\le 2$, $0\le y\le 2$.

Respuesta: $8\sqrt{26}\left(e^2-1\right)$

22. Calcule $\iint_S \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\mathrm{d}S$ donde S es la parte del paraboloide de ecuación $x=4-y^2-z^2$, que se encuentra frente al plano *yz*.

Respuesta: $\frac{\pi}{2}\left[4\sqrt{17}+\ln\left(4+\sqrt{17}\right)\right]$

23. Calcule $\iint_S x\,\mathrm{d}S$ donde S es la porción del plano de ecuación $z=x$, cuya proyección en el plano *xy* es el conjunto $\left\{(x,y)\in R^2\,/-1\le x\le 1 \quad \text{y} \quad -1\le y\le 1\right\}$.

Respuesta: 0

24. Calcule $\iint_S x^2\,\mathrm{d}S$ donde S es la parte del plano de ecuación $z=x$, interior al cilindro de ecuación $x^2+y^2=1$.

Respuesta: $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

25. Calcule $\iint_S x^2\,\mathrm{d}S$ donde S es la parte del cono de ecuación $z^2=x^2+y^2$, entre los planos de ecuaciones $z=1$ y $z=2$.

Respuesta: $\frac{15\pi\sqrt{2}}{4}$

26. Calcule $\iint_S xz\,\mathrm{d}S$ donde S es la parte del plano de ecuación $z=x+3$, que se encuentra dentro del cilindro de ecuación $x^2+y^2=1$.

Respuesta: $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

Si la densidad de masa $\delta(x,y,z)$ de una superficie S es conocida, entonces la masa total de S viene dada por

$$M(S)=\iint_S \delta(x,y,z)\,dS$$

Las coordenadas del centro de masa de S son:

$$x_M=\frac{1}{M(S)}\iint_S x\,\delta(x,y,z)\,dS \qquad y_M=\frac{1}{M(S)}\iint_S y\,\delta(x,y,z)\,dS \qquad z_M=\frac{1}{M(S)}\iint_S z\,\delta(x,y,z)\,dS$$

Las coordenadas del centroide de S son:

$$x_C = \frac{1}{A(S)} \iint_S x\ dS \qquad y_C = \frac{1}{A(S)} \iint_S y\ dS \qquad z_C = \frac{1}{A(S)} \iint_S z\ dS$$

Los momentos de inercia con respecto a los ejes son:

$$I_x = \iint_S \left(y^2 + z^2\right)\delta(x,y,z)\,dS \qquad I_y = \iint_S \left(x^2 + z^2\right)\delta(x,y,z)\,dS \qquad I_z = \iint_S \left(x^2 + y^2\right)\delta(x,y,z)\,dS$$

27. Una superficie S tiene la forma de de un hemisferio $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ con $0 \le x^2 + y^2 \le R^2$. La densidad de masa para en todo punto $P(x,y,z) \in S$ está dada por $\delta(x,y,z) = x^2 + y^2$. Halle: **a**) la masa total de S **b**) las coordenadas del centro de masa.

Respuesta: **a**) $\frac{4}{3}\pi R^4$ **b**) $x_M = y_M = z_M = 0$

28. Halle el momento de inercia alrededor del eje y de la superficie S definida sobre el cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que está dentro de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$. Suponga que la densidad de masa es $\delta(x,y,z) = 1$

Respuesta: $\frac{243\sqrt{2}}{4}\pi$

29. Evalúe $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\,dS$, donde $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ y $\vec{n}$ es el vector normal unitario a la mitad superior de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.

Respuesta: $32\sqrt{2}\,\pi$

30. Determine el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ a través de la parte del plano de ecuación $2x + 3y + z = 6$ contenida en el primer octante.

Respuesta: 18

31. Evalúe $\iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, si S es la parte del plano de ecuación $x + y + z = 1$, que está en el primer octante, en dirección de la normal apuntando hacia arriba.

Respuesta: $-\frac{3}{2}$

32. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z^4\vec{k}$, a través del cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \le 1$, en dirección de la normal apuntando hacia afuera.

Respuesta: $\frac{\pi}{3}$

33. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{j} - z\,\vec{k}$, a través de la superficie cerrada formada por el paraboloide de ecuación $y = x^2 + z^2$, $0 \le y \le 1$, y el disco determinado por $0 \le x^2 + z^2 \le 1$, $y = 1$.

Respuesta: 0

34. Halle el flujo del campo eléctrico $\vec{E}(x,y,z) = 2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}$ a través de la semiesfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \ge 0$, en dirección de la normal apuntando hacia arriba. Res. 4π

35. Halle $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\vec{k}$ a través de la parte del cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ donde $1 \le z \le 2$, con $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$.

Respuesta: $\frac{15\pi}{2}$

36. Evalúe $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} - y\,\vec{j}$, si S es la parte de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, que está en el primer octante, en dirección de la normal apuntando hacia arriba.

Respuesta: 0

37. Evalúe $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = y^2\vec{i} + z\,\vec{j} - x\vec{k}$, si S es la parte del cilindro de ecuación $y^2 = 1 - x$, que está entre los planos de ecuaciones $z = 0$ y $z = x$, con $x \ge 0$ y $\vec{n} \cdot \vec{i} > 0$

Respuesta: $\frac{4}{15}$

38. Evalúe $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + z\,\vec{j} + x\vec{k}$, si S es la porción del paraboloide de ecuación $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \ge 0$ y $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$

Respuesta: $-\pi$

Si $T(x,y,z)$ es la temperatura en un punto $(x,y,z) \in W \subset R^3$, donde *W* es alguna región del espacio, y T es una función C[1], se tiene que $\nabla T(x,y,z) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)$ representa el gradiente de la temperatura y el calor que fluye en la dirección del campo vectorial $\vec{F}$ dado por

$$\vec{F}(x,y,z) = -k\,\nabla T(x,y,z)$$

Donde *k* es una constante positiva y

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Es la tasa de flujo total de calor a través de la superficie S.

39. La temperatura T en un punto $P(x, y, z)$ de una bola cuya conductividad *k* es inversamente proporcional a la distancia que hay desde el centro de la bola hasta el punto P, es decir, $T(x, y, z) = \dfrac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Demuestre que el flujo de calor ϕ_T a través de una esfera S de radio *a* con centro el centro de la bola es $T(x, y, z) = 4\pi kc$.

TEOREMAS DE STOKES Y GAUSS

Definiciones, propiedades y teoremas importantes

Definición 6.1: Si $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ define un campo vectorial en R^3, si existen las derivadas parciales de las funciones *P*, *Q* y *R*, entonces el rotacional de $\vec{F}$ es un campo vectorial en R^3, definido por

$$\nabla \times \vec{F} = rot\,\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Teorema 6.1: Si *f* es una función real de tres variables que tiene derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces $rot(\nabla f(x,y,z)) = \vec{0}$.

Definición 6.2: Si $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ define un campo vectorial en R^3, si existen las derivadas parciales $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ y $\frac{\partial R}{\partial z}$, entonces la divergencia de $\vec{F}$ es una función real de tres variables, definido por

$$\nabla \cdot \vec{F} = div\,\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Teorema 6.2: Si $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ define un campo vectorial en R^3, si las funciones *P*, *Q* y *R* tienen derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces $div\,rot\,\vec{F} = 0$.

Teorema 6.3: (Teorema de Stokes) Sea S una superficie suave a trozos y orientada, que está limitada por una curva frontera C, cerrada, suave a trozos y positivamente orientada. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta de R^3 que contiene a S, entonces:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \nabla x\vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Teorema 6.4: (Teorema de la divergencia o de Gauss) Sea E una región simple, sólida cuya superficie frontera S tiene una orientación positiva. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta de R^3 que contiene a S, entonces:

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{S} = \iiint_E \mathrm{div}\,\vec{F}\; dV = \iiint_E \nabla \cdot \vec{F}\; dV$$

Problemas resueltos

1. En mecánica de fluidos, se dice que un fluido es irrotacional si el campo vectorial $\vec{F}$ que genera el flujo del fluido es tal que $\nabla\times\vec{F}=\vec{0}$. Halle las constantes *a*, *b* y *c* de forma tal que el campo vectorial definido por

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(x^2+ay+4z\right)\vec{i}+\left(2x-3y+bz\right)\vec{j}+\left(cx-y+2z\right)\vec{k}$$

sea irrotacional.

Solución:

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2+ay+4z & 2x-3y+bz & cx-y+2z\end{vmatrix}=\left(-1-b\right)\vec{i}+\left(4-c\right)\vec{j}+\left(2-a\right)\vec{k}$$

Luego,

$$\nabla\times\vec{F}=\vec{0}\Leftrightarrow a=2,\quad b=-1,\quad c=4$$

2. Se dice que un campo vectorial $\vec{F}$ es solenoidal si $\nabla\cdot\vec{F}=0$. Halle la constante *q* de forma tal que el campo vectorial definido por

$$\vec{F}(x,y,z)=\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{q}{2}}}\left(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}\right),\ \text{con}\ (x,y,z)\neq(0,0,0)$$

solenoidal.

Solución:

Evaluemos la derivada parcial con respecto a *x* de la primera componente del campo:

$$\frac{\partial\left(\dfrac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{q}{2}}}\right)}{\partial x}=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{q}{2}}-x\cdot\dfrac{q}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{q}{2}-1}\cdot 2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{q}}=$$

$$=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{q}{2}}-qx^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{q}{2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{q}}$$

Por analogía:

$$\frac{\partial\left(\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{q}{2}}}\right)}{\partial y}=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{q}{2}}-qy^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{q}{2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{q}}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{q}{2}}}\right)}{\partial z}=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{q}{2}}-qz^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{q}{2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{q}}$$

Luego,

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{q}{2}}\left[3-q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{q}}=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{q}{2}}\left[3-q\right]}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{q}}$$

De donde,

$$\nabla\cdot\vec{F}=0\Leftrightarrow 3-q=0\Leftrightarrow q=3$$

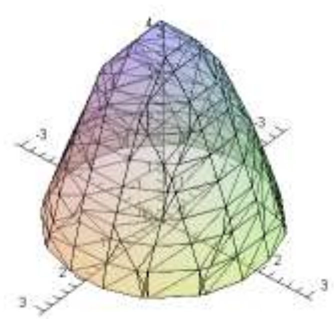
3. Sea $\vec{F}(x,y,z)=3y\vec{i}+4x\vec{j}+\vec{k}$. Halle $\int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$, donde C es la curva de intersección del paraboloide de ecuación $z=4-x^2-y^2$ con $z\geq 0$, con el plano *xy* orientada positivamente.

Solución:

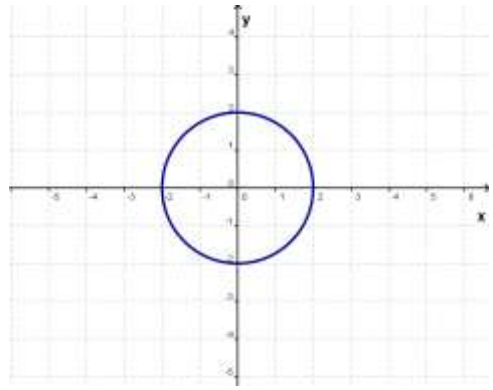
La superficie S es la parte del paraboloide mostrado en la figura, el cual interseca al plano *xy* en la circunferencia de ecuación

$$x^2+y^2=4$$

Como se observa en la figura, C es una cuerva simple, cerrada, suave y positivamente orientada



Además las componentes del campo $\vec{F}$: $F_1(x,y,z)=3y$, $F_2(x,y,z)=4x$ y $F_3(x,y,z)=1$ admiten derivadas parciales continuas en cualquier conjunto abierto que contenga a S.



Luego, por el teorema de Stokes:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla x\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

Como la superficie S es la gráfica de $g(x,y)=4-x^2-y^2$ con $(x,y)\in D$, donde D es el circulo centrado en el origen de radio 2, se tiene que el vector normal a la superficie es:

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{(g_x(x,y))^2+(g_y(x\ ,y))^2+1}}\right)\left(-g_x(x,y)\vec{i}-g_y(x,y)\vec{j}+\vec{k}\right)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{(g_x(x,y))^2+(g_y(x\ ,y))^2+1}}\right)\left(2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}\right)$$

Calculemos ahora el rotor del campo:

$$\nabla x\vec{F}=\vec{k}$$

Tenemos entonces que:

$$\iint_S \nabla x\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_S \nabla x\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}\,dS = \iint_D \nabla x\vec{F}(x,y,g(x,y))\cdot\left(-g_x(x,y)\vec{i}-g_y(x,y)\vec{j}+\vec{k}\right)dA$$
$$=\iint_D \vec{k}\cdot\left(2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}\right)dA=\iint_D dA=A(D)=4\pi$$

4. Verifique el teorema de Stokes para el campo $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z)=yz\,\vec{i}+xz\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$ y la superficie S es la parte de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=4$ que se encuentra dentro del cilindro de ecuación $x^2+y^2=1$ y por encima del plano xy.

Solución:

Se debe verificar:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla x\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

Donde C es la curva frontera de S orientada positivamente.

i) Calculemos $\int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$

La ecuación de la curva C se obtiene intersecando ambas superficies:

Al sustituir $x^2+y^2=1$ en $x^2+y^2+z^2=4$, resulta $1+z^2=4 \Rightarrow z=\sqrt{3}\ \ (z>0)$

Por lo tanto, unas ecuaciones paramétricas de la curva C son $x=\cos t$, $x=\operatorname{sen} t$, $z=\sqrt{3}$ con $0\leq t\leq 2\pi$.

Observe que la curva C es la circunferencia de centro $\left(0,0,\sqrt{3}\right)$ y radio 1 ubicada en el plano de ecuación $z=\sqrt{3}$.

Se tiene que

$$dx=-\mathrm{sen}t\,dt \quad dy=\cos t\,dt \quad dz=0$$

Al aplicar la definición de integral de línea, se obtiene:

$$\int_C \vec{\mathrm{F}}\cdot d\vec{r}=\int_C yzdx+xzdy+xydz=\int_0^{2\pi}\left(-\sqrt{3}\operatorname{sen}^2 t+\sqrt{3}\cos^2 t\right)\mathrm{d}t=\sqrt{3}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t\right)dt$$
$$=\sqrt{3}\int_0^{2\pi}\cos(2t)dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\operatorname{sen}(2t)\right]_0^{2\pi}=0$$

ii) Calculemos $\iint_S \nabla x\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

Observe que se puede considerar a S como la gráfica de $z=g(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ con $(x,y)\in D$, donde D es la región del plano *xy* limitada por $x^2+y^2=1$.

El rotor del campo es:

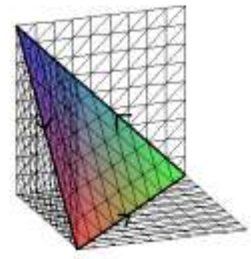
$$\nabla x\vec{F}=\vec{0}$$

En consecuencia:

$$\iint_S \nabla x\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iint_S \vec{0}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=0$$

De i) y ii) se obtiene que $\int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\iint_S \nabla x\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$.

5. Verifique el teorema de Stokes para el campo $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z)=(y+x)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x+z)\vec{k}$ si S de la parte del plano de ecuación $x+y+z=1$ que está en el primer octante, como se observa en la figura.



Solución:

Se debe verificar:

$$\int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \nabla x\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Donde C es la curva frontera de S orientada positivamente.

i) Calculemos $\int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$

$$\int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Donde C_1 es el segmento de recta que se obtiene al intersecar la superficie S con el plano xy, C_2 es el segmento de recta que se obtiene al intersecar la superficie S con el plano yz y, C_3 es el segmento de recta que se obtiene al intersecar la superficie S con el plano xz.

C_1 puede ser parametrizada por $x=1-t,\ y=t,\ z=0,$ con $0\le t\le 1.$

De donde:

$$dx=-dt \qquad dy=dt \qquad dz=0$$

Al aplicar la definición de integral de línea, se obtiene:

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 (-1+t)\,\mathrm{d}t = -t+\frac{t^2}{2}\ \Big|_0^1 = -1+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

C_2 puede ser parametrizada por $x=0,\ y=1-t,\ z=t,$ con $0\le t\le 1.$

De donde:

$$dx=0 \qquad dy=-dt \qquad dz=dt$$

Al aplicar la definición de integral de línea, se obtiene:

$$\int_{C_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 (-1+t)\,\mathrm{d}t = -t + \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2}$$

C_3 puede ser parametrizada por $x = t,\ y = 0,\ z = 1 - t,$ con $0 \le t \le 1.$

De donde:

$$dx = dt \qquad dy = 0 \qquad dz = -dt$$

Al aplicar la definición de integral de línea, se obtiene:

$$\int_{C_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 (t-1)\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - t \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$\int_{C} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{3}{2}$$

ii) Calculemos $\iint_S \nabla x\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

Observe que se puede considerar a S como la gráfica de $z = g(x, y) = 1 - x - y$ con $(x, y) \in D$, donde D es la región del plano *xy* limitada por $x + y = 1$ y los ejes de coordenadas.

El rotor del campo es:

$$\nabla x\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+x & y+z & x+z \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

En consecuencia:

$$\iint_S \nabla x\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right)\cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

En este caso, que el vector normal a la superficie apunta hacia arriba, luego su componente $\vec{k}$ es positiva, se tiene entonces que el vector normal a dicha superficie es:

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{(g_x(x,y))^2 + (g_y(x\ ,y))^2 + 1}}\right)\left(-g_x(x,y)\vec{i} - g_y(x,y)\vec{j} + \vec{k}\right)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{(g_x(x,z))^2 + (g_y(x\ ,z))^2 + 1}}\right)\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$$

$$\iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \nabla\times\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_D \nabla\times\vec{F}(x,y,g(x,y))\cdot\left(-g_x(x,y)\vec{i}-g_y(x,y)\vec{j}+\vec{k}\right)\mathrm{d}A$$

$$=\iint_D (-3)\mathrm{d}A = -3\,A(D) = -3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

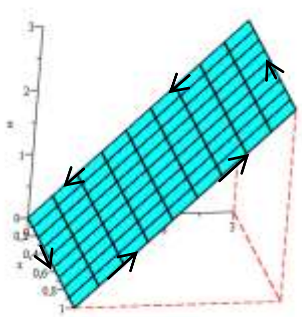
Por lo tanto

$$\int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \nabla x\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{3}{2}$$

De i) y ii) se obtiene que $\int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \nabla x\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

6. Una partícula P se mueve por los bordes del rectángulo C, en el plano de ecuación $z=y$, por acción del campo de fuerzas definido por $\vec{F}(x,y,z)=x^2\vec{i}+4xy^2\vec{j}+xy^2\vec{k}$. Calcule el trabajo que se ejerce en el campo de fuerza dado para mover la partícula P.

Solución:



El trabajo realizado viene dado por la integral de línea

$$W=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

La evaluación directa de esta integral requiere del cálculo de cuatro integrales de línea. Cómo C es una curva cerrada simple, orientada positivamente, suave a trozos, que es la frontera de una superficie S, donde S es una porción del plano de ecuación $z=y$, y además las componentes del campo vectorial $\vec{F}$ admiten derivadas parciales continuas en cualquier conjunto abierto que contenga a la superficie S, por el teorema de Stokes

$$W=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

donde

$$\nabla x\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & 4xy^2 & xy^2 \end{vmatrix} = 2xy\vec{i} - y^2\vec{j} + 4y^2\vec{k}$$

En este caso, que el vector normal a la superficie apunta hacia arriba, luego su componente $\vec{k}$ es positiva, se tiene entonces que el vector normal a dicha superficie es:

$$\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}}\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}+\vec{k}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$$

Como

$$dS=\sqrt{2}dA$$

Se tiene que

$$W=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_R \left(2xy,-y^2,4y^2\right)\cdot(0,-1,1)dA$$

Donde R es la proyección del rectángulo sobre el plano xy,

$$W=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_R \left(2xy,-y^2,4y^2\right)\cdot(0,-1,1)dA=\int_0^1\int_0^3\left(y^2+4y^2\right)dydx=45$$

7. Considere los campos vectoriales $\vec{F}$ y $\vec{G}$ definidos por

$$\vec{F}(x,y,z)=(1-8y)\vec{i}+(-6x+3)\vec{j}+\left(3z^4-2\right)\vec{k}$$

Y

$$\vec{G}(x,y,z)=\left(7-y^2\right)\vec{i}+\left(2y+\ln\left(x^2-9\right)\right)\vec{j}+\left(2xyz^2+1\right)\vec{k}$$

Y sea *C* la curva frontera de la superficie de ecuación $z=\sqrt{x^2+y^2}$ que queda dentro del cilindro de ecuación $(x-1)^2+y^2=1$ en dirección de la normal apuntando hacia arriba.

a) Verifique si los campos cumplen con las hipótesis del teorema de Stokes.

b) Seleccione cualquiera de los campos que cumple con el teorema de Stokes en la parte a) para calcular $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ o $\int_C \vec{G}\cdot d\vec{r}$

Solución:

a) Las funciones componentes del campo $\vec{F}$ tienen derivadas parciales continuas en todo R^3, por lo tanto, tienen derivadas parciales continuas en cualquier conjunto abierto que contenga a la superficie *S* y en consecuencia si cumple con las hipótesis del teorema de Stokes.

El campo $\vec{G}$ no cumple las hipótesis en cualquier región del espacio tal que $x^2\leq 9$, es decir, $-3\leq x\leq 3$.

b)

$$\nabla x\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2 & 4xy^2 & xy^2\end{vmatrix}=2\vec{k}$$

S es la gráfica de $z=\sqrt{x^2+y^2}$, cuya proyección en el plano xy es la circunferencia de centro $C(1,0)$ y radio 1.

El vector normal a *S* es $\vec{n}=(-z_x, z_y, 1)=\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$

Por lo tanto,

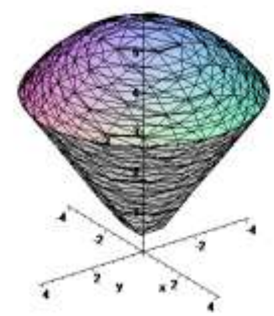
$$I=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iint_D 2\,dA=2A(D)=2\pi$$

8. Halle el flujo generado por el campo vectorial $\vec{F}$, donde $\vec{F}(x,y,z)=e^{y^2+z^2}\,\vec{i}+\left(x^2+y\right)\vec{j}+z\,\vec{k}$ a través de la superficie frontera S del sólido Q acotado superiormente por la gráfica de $z=\sqrt{32-x^2-y^2}$ e inferiormente por la gráfica de $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Solución:

Se pide evaluar $\iint_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$.

Donde S es una superficie cerrada mostrada en la figura.



S es frontera de un sólido simple Q, y además las componentes del campo $\vec{F}$ admiten derivadas parciales continuas en cualquier conjunto abierto que contenga a Q.

En efecto:

$$\frac{\partial\left(e^{y^2+z^2}\right)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\left(x^2+y\right)}{\partial y}=1 \text{ y } \frac{\partial(z)}{\partial z}=1$$

Por el teorema de Gauss.

$$\iint_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_Q \nabla\cdot\vec{F}\,\mathrm{d}V$$

Como

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial\left(e^{y^2+z^2}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(x^2+y\right)}{\partial y}+\frac{\partial(z)}{\partial z}=2$$

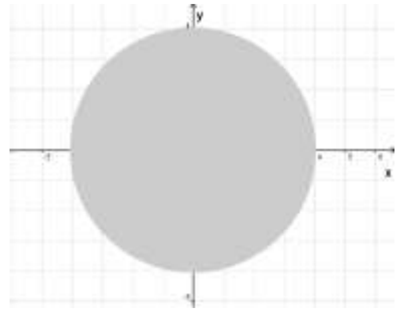
Se tiene que

$$\iint_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_Q \nabla\cdot\vec{F}\,\mathrm{d}V=2\iiint_Q \mathrm{d}V$$

Para plantear la integral triple se puede proyectar el sólido sobre el plano *xy*. Para ello se debe buscar primero la curva de intersección de ambas superficies:

$$\sqrt{32-x^2-y^2} = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow 32-x^2-y^2 = x^2+y^2 \Rightarrow 32 = 2x^2+2y^2 \Rightarrow x^2+y^2 = 16.$$

Observe que la proyección de Q en el plano xy es el círculo centrado en el origen y radio 4.



La integral se puede calcular usando coordenadas cilíndricas.
La ecuación $z=\sqrt{32-x^2-y^2}$ en coordenadas cilíndricas se escribe como

$$z=\sqrt{32-(r\cos\theta)^2-(r\,sen\theta)^2} = \sqrt{32-r^2}$$

Las ecuaciones de las superficies que limitan al sólido retransforman en coordenadas cilíndricas en:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{l} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le r\le 4 \\ r\le z\le\sqrt{32-r^2} \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_Q \nabla\cdot\vec{F}\,dV = 2\iiint_Q dV = 2\int_0^{2\pi}\int_0^4\int_r^{\sqrt{32-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^4\left[r\sqrt{32-r^2}-r^2\right]dr\,d\theta =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}\left(32-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{3}\right]\Big|_0^4 d\theta = 2\left(\frac{128}{3}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{512\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

9. Calcule el flujo generado por el campo $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z)=x^3\,\vec{i}+y^3\,\vec{j}+z^3\,\vec{k}$ a través de la superficie S. Donde S es la frontera del sólido acotado por las gráficas de $x^2+y^2=4$, $z=0$ y $z=3$, con orientación positiva.

Solución:

Dado que:

- S es una superficie cerrada, que es la frontera de un sólido simple E.
- Las componentes del campo $\vec{F}$ admiten derivadas parciales continuas en cualquier conjunto abierto que contenga a E: $\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial x}=3x^2$, $\frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial y}=3y^2$ y $\frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial z}=3z^2$.

Por el teorema de Gauss.

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E \nabla\cdot\vec{F}\, dV$$

Como

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x,y,z))}{\partial y} + \frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial z} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$$

Se tiene que

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E \nabla\cdot\vec{F}\, dV = \iiint_E \left(3x^2 + 3y^2 + 3z^2\right) dV$$

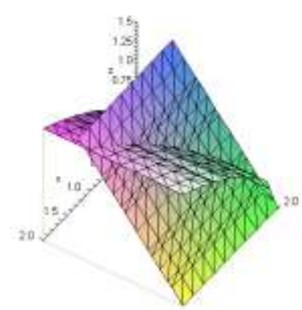
Para calcular la integral triple, proyectemos E sobre el plano xy.

En consecuencia,

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E \nabla\cdot\vec{F}\, dV = \iiint_E \left(3x^2 + 3y^2 + 3z^2\right) dV = 3\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^3 \left(r^2 + z^2\right) r\, dz\, dr\, d\theta = 180\pi$$

10. Calcula el flujo generado por el campo $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z) = e^{z+\arctan x}\vec{i} + \dfrac{-y\,e^{z+\arctan x}}{\left(1+x^2\right)}\vec{j} + z\,\vec{k}$ a través de la superficie S. Donde S es la frontera del sólido E acotado por las gráficas de $z=\sqrt{y}$, $x=0$, $x=2$, $z=0$ y $z+y=2$, con orientación positiva.

Solución:



- S es una superficie cerrada, que es la frontera de un sólido simple E.
- Las componentes del campo $\vec{F}$ admiten derivadas parciales continuas en cualquier conjunto abierto que contenga a E: $\dfrac{\partial F_1}{\partial x} = \dfrac{e^{z+\arctan x}}{x^2+1}$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial y} = -\dfrac{e^{z+\arctan z}}{1+x^2}$ y $\dfrac{\partial F_3}{\partial z} = 1$.

Por el teorema de Gauss.

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E \nabla\cdot\vec{F}\, dV$$

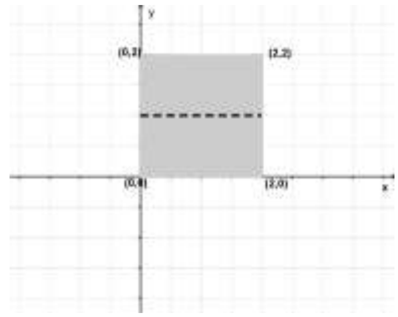
Como

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial(F_1)(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial(F_2)(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial(F_3)(x,y,z)}{\partial z} = 1$$

Se tiene que

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E \nabla\cdot\vec{F}\, dV = \iiint_E dV$$

Para calcular la integral triple, proyectemos E sobre el plano *xy*, esta se muestra en la figura.



En consecuencia,

$$\iint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_E \nabla\cdot\vec{F}\,\mathrm{d}V = \iiint_E \mathrm{d}V = \int_0^2\int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} dz\,dy\,dx + \int_0^2\int_1^2\int_0^{2-y} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2\int_0^1 \sqrt{y}\;dy\,dx + \int_0^2\int_1^2 (2-y)dy\,dx = \frac{7}{3}$$

11. Halle el flujo generado por el campo vectorial $\vec{F}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = -x^2\,\vec{i} + \left(2xy + e^z\right)\vec{j} + \left(z - 4y\cos x\right)\vec{k}$ a través de la superficie frontera S del sólido Q acotado por las gráficas de las superficies de ecuaciones: $z = x^2$, $z = 1$, $y = 1$ y $y = 0$.

Solución:

Se debe evaluar $\iint_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$, sobre la superficie cerrada S mostrada en la figura.

La superficie S es una superficie cerrada, la cual es frontera de un sólido simple Q y, además las componentes del campo $\vec{F}$ admiten derivadas parciales continuas en cualquier conjunto abierto que contenga a Q, en efecto,

$$\frac{\partial\left(-x^2\right)}{\partial x} = -2x\,,\quad \frac{\partial\left(2xy + e^z\right)}{\partial y} = 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial\left(z - 4y\cos x\right)}{\partial z} = 1$$

Por el teorema de Gauss.

$$\iint_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_Q \nabla\cdot\vec{F}\,\mathrm{d}V$$

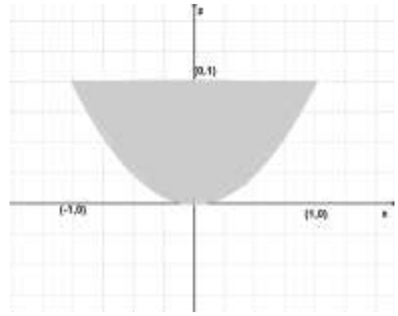
Como

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial\left(-x^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(2xy + e^z\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(z - 4y\cos x\right)}{\partial z} = -2x + 2x + 1 = 1$$

Se tiene que

$$\iint_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_Q \nabla\cdot\vec{F}\,\mathrm{d}V = \iiint_Q \mathrm{d}V \qquad (*)$$

La proyección de Q en el plano *xz* se muestra en la figura.



Por lo tanto:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_Q \nabla\cdot\vec{F}\,dV = \iiint_Q dV = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1} dy\,dz\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} dz\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[1-x^2\right]dx = x-\frac{x^3}{3}\ \Big|_{-1}^{1} = 1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

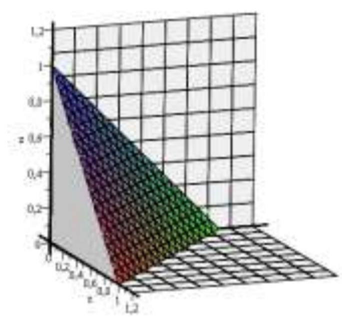
12. Verifique el teorema de la divergencia para el campo vectorial $\vec{F}$ definido por

$$\vec{F}(x,y,z) = x^2\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + x\vec{k}$$

Y *Q* es el sólido acotado por las superficies de ecuaciones $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ y $z=0$

Solución

a) Primero calcularemos la integral de superficie. Sean:



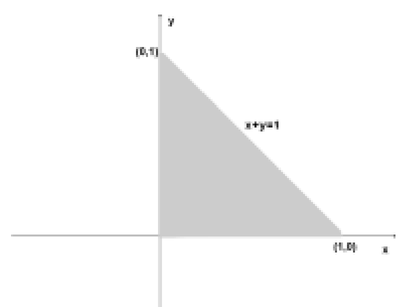
S$_1$: $z=0$ con $(x,y)\in D_1$

S$_2$: $x=0$ con $(y,z)\in D_2$

S$_3$: $y=0$ con $(x,z)\in D_3$

S$_4$: $z=1-x-y$ con $(x,y)\in D_4 = D_1$

Sobre S$_1$:



S$_1$ es la superficie de ecuación $z=0$ con $(x,y)\in D_1$, donde D$_1$ es la proyección de de S$_1$ en el plano xy mostrada en la figura.

En S$_1$ el vector normal unitario es $\vec{n_1} = -\vec{k}$.

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dA = dA$$

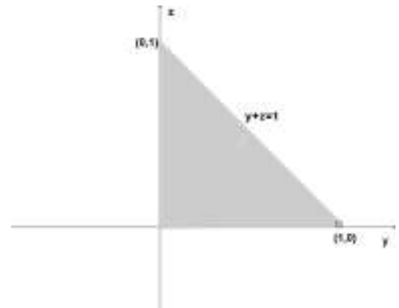
$$\vec{F}(x,y,z)\cdot\overrightarrow{n_1}=\left(x^2\,\vec{i}+yz\,\vec{j}+x\vec{k}\right)\cdot\left(-\vec{k}\right)=-x$$

En consecuencia,

$$\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=-\iint_{D_1}x\,dA=-\int_0^1\int_0^{1-x}x\,dy\,dx=-\frac{1}{6}$$

Sobre S_2:

S_2 es la superficie de ecuación $x=0$ con $(y,z)\in D_2$, donde D_2 es la proyección de S_2 en el plano yz mostrada en la figura.



En S_2 el vector normal unitario es $\overrightarrow{n_2}=-\vec{i}$, y

$$dS=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2+1}\,dA=dA$$

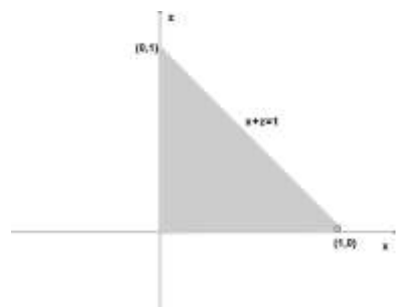
$$\vec{F}(x,y,z)\cdot\overrightarrow{n_2}=\left(x^2\,\vec{i}+yz\,\vec{j}+x\vec{k}\right)\cdot\left(-\vec{i}\right)=-x^2$$

En consecuencia,

$$\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\overrightarrow{n_2}\,dS=-\iint_{D_2}x^2dA=-\int_0^1\int_0^{1-y}x^2\,dydz=0$$

Sobre S_3:

S_3 es la superficie de ecuación $y=0$ con $(x,z)\in D_3$, donde D_3 es la proyección de S_3 en el plano xz mostrada en la figura.



En S_3 el vector normal unitario es $\overrightarrow{n_3}=-\vec{j}$, y

$$dS=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2+1}\,dA=dA$$

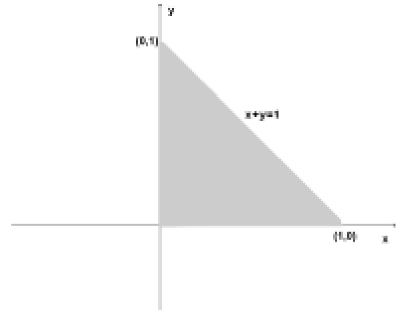
$$\vec{F}(x,y,z)\cdot\overrightarrow{n_3}=\left(x^2\,\vec{i}+yz\,\vec{j}+x\vec{k}\right)\cdot\left(-\vec{j}\right)=-yz=0$$

En consecuencia,

$$\iint_{S_3} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_3}\, dS = 0$$

Sobre S_4:

S_4 es la superficie de ecuación $z = 1 - x - y$ con $(x, y) \in D_4$, donde D_4 es la proyección de S_4 en el plano xy mostrada en la figura.



$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1$$

En S_4 la componente en la dirección z apunta hacia arriba, luego vector normal unitario es

$$\overrightarrow{n_4} = \frac{\left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

y

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 + 1}\, dA = \sqrt{3}\, dA$$

Luego,

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) \cdot \overrightarrow{n_4} = \left(x^2, yz, x\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \frac{x^2 + yz + x}{\sqrt{3}}$$

En consecuencia,

$$\iint_{S_4} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_4}\, dS = \iint_{D_4} \left(x^2 + y(1 - x - y) + x\right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(x^2 + y - xy - y^2 + x\right) dy\, dx = \frac{7}{24}$$

Luego:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}\, dS = -\frac{1}{6} + 0 + 0 + \frac{7}{24} = \frac{1}{8}$$

b) Ahora calcularemos la integral triple

$$\nabla \cdot \overrightarrow{F} = 2x + z$$

$$\iiint_Q \nabla \cdot \overrightarrow{F}\, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (2x + z)\, dz\, dy\, dx = \frac{1}{8}$$

13. Calcule $\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ para

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2 + \cos\left(y^2\right)\right)\vec{i} + \left(z^2 - xy\right)\vec{j} + \left(xe^{x^2+y^2} + y^4\right)\vec{k}$$

si *S* es la frontera de la región acotada por las superficies de ecuaciones

$$z = 5 - x^2 - y^2,\ \ z = 1 \ \text{ y } \ z = 4$$

en el primer cuadrante.

Solución:

La superficie *S* es una superficie cerrada, la cual es frontera de un sólido simple *Q* y, además las componentes del campo $\vec{F}$ admiten derivadas parciales continuas en cualquier conjunto abierto que contenga a *Q*, en efecto,

Además las componentes del campo $\vec{F}$ admiten derivadas parciales continuas en cualquier conjunto abierto que contenga a *Q*, en efecto,

$$\frac{\partial\left(x^2 + \cos\left(y^2\right)\right)}{\partial x} = 2x\,, \quad \frac{\partial\left(z^2 - xy\right)}{\partial y} = -x \quad \text{y} \quad \frac{\partial\left(xe^{x^2+y^2} + y^4\right)}{\partial z} = 0$$

Por el teorema de Gauss.

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_Q \nabla\cdot\vec{F}\,dV = \iiint_Q x\,dV$$

En coordenadas cilíndricas:

Observe que cuando $0 \le r \le 1$ entonces $1 \le z \le 4$ y cuando $1 \le r \le 2$ entonces $1 \le z \le 5 - r^2$. Por lo tanto,

Problemas propuestos

En los problemas de 1 y 2 determine el rotor del campo vectorial $\vec{F}$ en el punto dado.

1. $\vec{F}(x,y,z)=x^2\vec{i}+2yz\,\vec{j}+z\,\vec{k}$, $P\left(\sqrt{3},1,2\right)$ **2**. $\vec{F}(x,y,z)=e^{xy}\vec{i}+\vec{j}+x\,\vec{k}$, $P(2,-3,0)$

Respuestas: **1**) $-2\vec{i}$ **2**) $-\vec{j}-2e^{-6}\vec{k}$

En los problemas de 3 y 4 determine la divergencia del campo vectorial dado.

3. $\vec{F}(x,y,z)=x^2\vec{i}+2yz\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ **4**. $\vec{F}(x,y,z)=e^{xy}\vec{i}+\vec{j}+x\,\vec{k}$

Respuestas: **1**) $2x+2z+1$ **2**) ye^{xy}

5. Halle $\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)$ para el campo $\vec{F}(x,y,z)=xyz\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$

Respuesta: 0

6. Halle la constante *q* de forma tal que el campo vectorial $\vec{F}$ definido por

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(2x^3yz^q+8x^2y^3z^{q+1},3x^4y^2z^q-3x^2y^2z^q,-4xy^3z^{q+2}-2x^4yz^{q+1}\right)$$

sea solenoidal ($\nabla\cdot\vec{F}=0$)

Respuesta: 2

7. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ orientada positivamente, si $\vec{F}(x,y,z)=\left(\dfrac{z^4}{4}+x^3\right)\vec{i}+4x\,\vec{j}+\left(xz^3+z^2\right)\vec{k}$, y C es la curva frontera de la semiesfera de ecuación $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Respuesta: 4π

8. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ orientada positivamente, si $\vec{F}(x,y,z)=e^{-x}\,\vec{i}+e^{x}\,\vec{j}+e^{z}\,\vec{k}$, y C es la curva frontera de la parte del plano de ecuación $2x+y+2z=2$ que está en el primer octante.

Respuesta: $2(e-1)$

9. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ orientada positivamente, si $\vec{F}(x,y,z)=x^2\,\vec{i}+(2xy+x)\vec{j}+z\,\vec{k}$, sea C es la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=1$ y $S=\left\{(x,y,z)\in R^3 \,/\, x^2+y^2\le 1 \quad y \quad z=0\right\}$.

Respuesta: π

10. Verifique el teorema de Stokes para el campo $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z)=yz\,\vec{i}+xz\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$ y la superficie S es la parte del paraboloide de ecuación $z=2x^2+2y^2$ que se encuentra dentro del cilindro de ecuación $x^2+y^2=1$.

Respuesta: ambas integrales dan 0

11. Verifique el teorema de Stokes para el campo $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+x\vec{j}+z^2\vec{k}$ y S es la superficie de ecuación $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$.

Respuesta: Ambas integrales son iguales a 16π

12. Verifique el teorema de Stokes para el campo $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ y S es la parte del plano de ecuación $x+y+z=1$, que está en el primer octante, en dirección positiva.

Respuesta: Ambas integrales son iguales a 0

13. Verifique el teorema de Stokes para el campo $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ y donde S es la parte del cilindro de ecuación $x^2+y^2=1$ que está entre los planos de ecuaciones $z=0$ y $z=x+2$, con $\vec{n}\cdot\vec{k}>0$.

Respuesta: Ambas integrales son iguales a $-\pi$

14. Verifique el teorema de Stokes para el campo $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z)=(-y+z)\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$ y donde S es la semiesfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$ con $z\geq 0$ y la normal apuntando hacia afuera.

Respuesta: Ambas integrales son iguales a 2π

15. Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, donde $\vec{F}(x,y,z)=2x^3\,\vec{i}+2y^3\,\vec{j}+2z^3\,\vec{k}$ y S es la frontera del sólido acotado por las gráficas de $x^2+z^2=9$, $y=0$ y $y=2$, con orientación positiva.

Respuesta: 630π

16. Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, con $\vec{F}(x,y,z)=xy^2\,\vec{i}+yz\,\vec{j}+zx^2\,\vec{k}$ y S es la frontera del sólido acotado por las gráficas de $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $z=1$ y $z=3$, con orientación positiva.

Respuesta: 27π

17. Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, donde $\vec{F}(x,y,z)=\left(-x^2+\cos y\right)\vec{i}+\left(2xy+2^z\right)\vec{j}+\left(z+8y^3e^x\right)\vec{k}$ y S es la frontera del sólido Q acotado por las superficies de ecuaciones: $z=y^2$, $z=2$, $x=1$ y $x=0$.

Respuesta: $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

18. Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, con $\vec{F}(x,y,z)=x^2\,\vec{i}+(-2xy+\cos z)\vec{j}+e^x\vec{k}$ y S es la frontera del sólido Q acotado por las gráficas de las superficies de ecuaciones: $x^2+y^2=1$, $y+z=4$, $x=0$, $z=0$ y $y=0$ en el primer octante.

Respuesta: 0

19. Determine el flujo del campo $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z)=3x\vec{i}+xz\vec{j}+z^2\vec{k}$ a través de la superficie frontera de la región del espacio acotada por la gráfica de $z=4-x^2-y^2$ y el plano *xy*.

Respuesta: $\frac{136}{3}\pi$

20. Evalúe $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, donde $\vec{F}(x,y,z)=\left(x^2+sen\,yz\right)\vec{i}+\left(y-xe^{-z}\right)\vec{j}+z^2\vec{k}$ y $\vec{n}$ es el vector normal unitario a la superficie frontera de la región acotada por las gráficas de $x^2+y^2=4$, $x+z=2$ y $z=0$

Respuesta: 20π

21. Verifique el teorema de Gauss para el campo $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ y S es frontera de la región del espacio acotada por la gráficas de $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$ y $z=0$.

Respuesta: Ambas integrales son iguales a 432π

22. Verifique el teorema de Gauss para el campo $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z)=-y\vec{i}+x\vec{j}+z\vec{k}$ y S es frontera de la región del espacio acotada por la gráficas de $z=\sqrt{6-x^2-y^2}$ y $z=0$.

Respuesta: Ambas integrales son iguales a $4\sqrt{6}\,\pi$

23. Verifique el teorema de Gauss para el campo $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+2y\vec{j}+3z\vec{k}$, si S es el cubo de vértices $(\pm1,\pm1,\pm1)$, en dirección de la normal apuntando hacia afuera.

Respuesta: Ambas integrales son iguales a 48

24. Verifique el teorema de Gauss para el campo $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z)=2x\vec{i}+3y\vec{j}-4z\vec{k}$, si S es la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=4$ en dirección de la normal apuntando hacia afuera.

Respuesta: Ambas integrales son iguales a $\frac{32\pi}{3}$

25. Verifique el teorema de Gauss para el campo $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x,y,z)=\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(z\vec{i}+x\vec{j}+y\vec{k}\right)$, si S es la frontera del sólido Q acotado interiormente por la gráfica de $x^2+y^2+z^2=1$ y exteriormente por la gráfica de $x^2+y^2+z^2=4$, dirección de la normal apuntando hacia afuera.

Respuesta: Ambas integrales son iguales a 0

26. Sea *Q* el sólido limitado por las superficies de ecuaciones:

$$z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\quad x^2 + y^2 = 4,\ \ x^2 + y^2 = 1\quad ,\ \ z = 0$$

Halle el flujo generado por el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(x^3 + \arctan y\right)\vec{i} + \left(y^3 + e^{z^2}\right)\vec{j} + \left(e^{x+y}\right)\vec{k}$$

que sale de *Q*.

Respuesta: Ambas integrales son iguales a $\frac{264}{5}\pi$

27. Sea *Q* una región del espacio con frontera *S* donde es aplicable el teorema de Gauss. Sea *f* un campo escalar que admite derivadas parciales continuas en algún conjunto abierto *D* que contenga a *Q*, y sea $\vec{F}$ un campo vectorial cuyas funciones componentes admiten derivadas parciales continuas en *D*. Demuestre que

$$\iint_S f\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_Q f\,\nabla\cdot\vec{F}\,dV + \iiint_Q \nabla f\cdot\vec{F}\,dV$$

BIBLIOGRAFÍA

- Abreu, Daza y Montezuma. (2012). Guía de Matemática V. UNIMET.

- ANTON, H.,BIVENS, I. Y DAVIS, S. (2009). *Cálculo. Trascendentes Tempranas*. 2ª ed. México: Limusa, S.A. de C. V. Grupo Noriega Editores.

- LARSON, HOSTETLER Y EDWARDS. (2006). *Cálculo* II. 8ª ed. México: McGraw-Hill Interamericana

- LEITHOLD, L. (2008). *El Cálculo.* 7a ed. México: Oxford University Press México, S.A. de C.V.

- PENNEY, E. (2008). *Cálculo con Trascendentes Tempranas*. 7ª ed. México: Pearson Educación de México, S.A. de C. V

- PITA, C. (1995). *Cálculo Vectorial*. 1ª ed. México: Pretince Hall Hispanoamericana, S.A.

- PURCELL, E., VARBERG, D. Y RIGDON, S. (2007). *Cálculo.* 9a ed. México: Pearson Educación de México, S.A. de C. V.

- STEWART, J. (2012). *Cálculo de varias Variables. Trascendentes Tempranas*. 7ª ed. México: Cengage Learning.

- THOMAS, G. (2006). *Cálculo Varias Variables*. 11ª ed. México: Pearson Educación de México, S.A. de C. V